INSTITUTTET FOR HUSBYGNING

Forelæsningsnotat nr. 68

2. udgave 1992

EGIL BORCHERSEN
HENNING LARSEN

SKIVEBYGNINGERS STATIK

Den polytekniske Læreanstalt, Danmarks tekniske Højskole
Lyngby 1985

FORORD

Dette forelæsningsnotat er udarbejdet til kursus 6523 - Præfabrikerede Bygninger 1.

Notatets formål er at give en forståelse af lastnedføringen gennem en bygning, hvor konstruktionen er opbygget af skiver, som f.eks. bygninger med bærende og afstivende vægge i beton. Der behandles kun skivebygninger, der er karakteristiske for dansk betonelementbyggeri.

Notatet er en revideret udgave af forrige års noter. Notatet bygger på Forelæsningsnotat nr. 42: Skivebygningers statik af Egil Borchersen, og Noter om Bygningens beregning og om Bygningens Konstruktionsmodel af Henning Larsen. Revisionen er foretaget af Henning Larsen.

Instituttet for Husbygning, 1985.

Egil Borchersen
Henning Larsen

(2)

FORORD TIL 2. UDGAVE

Der er rettet nogle trykfejl, der havde indsneget sig i 1. udgave.

Herudover er siderne 4-10 til 4-18 revideret (erstattet af siderne 4-10 til 4-18f).

Instituttet for Husbygning, 1992.

Henning Larsen

INDHOLDSFORTEGNELSE

side

1 INDLEDNING TIL SKIVEKONSTRUKTIONSBEREGNING

1.1 Indledning

For bygninger gælder det, at konstruktionen skal dimensioneres og udføres således, at den med en given sikkerhed kan modstå de laster, den er forudsat udsat for, har tilstrækkelig bæreevne i tilfælde af brand, fungerer tilfredsstillende ved normal brug og har tilfredsstillende bestandighed og robusthed, jævnfør Sikkerhedsbestemmelser for Konstruktioner, DS 409 [26].

I dette forelæsningsnotat behandles kun forhold i forbindelse med en vurdering af, at konstruktionen har den fornødne sikkerhed mod brud for bestemte belastninger.

En sådan vurdering af en konstruktion kræver bl.a. kendskab til de spændinger og deformationer, som de ydre påvirkninger på bygværket giver anledning til.

Da de ydre påvirkning hovedsageligt forekommer i form af kræfter, der virker på konstruktionens forskellige dele, indgår det som et væsentligt led i konstruktionsvurderingen at kunne bestemme de spændinger og deformationer, som vilkårlige kræfter på konstruktionen forårsager. Spændings- og deformationsbestemmelsen kan ske enten ved forsøg eller ved beregning.

Beregningen sker på en model af konstruktionen, konstruktionsmodellen, ved hjælp af en beregningsmetode.

Konstruktionsmodel
+
Beregningsmetode
=
Beregningsmodel

Opstilling af konstruktionsmodel er første skridt, når en beregningsmodel for bygningen skal findes.

Det næste er valg af beregningsmetode med dertil hørende opstilling af beregningsforudsætninger.

En konstruktionsmodel er en bærende og afstivende konstruktion, som ligner den virkelige bygning rimeligt godt, hvad angår virkemåde, og som ingeniøren kan regne på.

Konstruktionsmodellen er også en slags forudsætning for beregningsmetoden, og det kan ofte være svært at afgøre (men i øvrigt uden praktisk betydning), hvornår man vil kalde sin ingeniørmæssige modelleren og forenkling for konstruktionsmodel, og hvornår for beregningsforudsætning.

Skiver kan i visse tilfælde beregnes efter den tekniske bjælketeori, og i afsnittet søges der redegjort for, hvornår bjælketeorien giver tilstrækkeligt gode resultater.

I afsnittet om Statisk ubestemte skivekonstruktioner er behandlet beregningsmetoder til bestemmelse af snitkræfter i sådanne konstruktioner, udsat for vandret last.

I afsnittet om Bygningens beregning er behandlet enkeltheder i beregningen af en bygnings konstruktion.

"Normale" skivebygninger

Der betragtes kun skivebygninger, der er karakteristisk for dansk betonelementbyggeri. Metoderne, der omtales, er de typisk anvendte, og deres forudsætninger og gyldighedsområder søges analyseret.

(9)

1.2 Definitioner

Skivevirkning:

Pladevirkning:

Et plant konstruktionselement, der har en symmetriplan, og hvis udstrækning i symmetriplanen er stor i forhold til udstrækningen vinkelret herpå, siges at virke som en skive over for kraftpåvirkninger i symmetriplanen, medens det siges at virke som en plade over for kraftpåvirkninger vinkelret på symmetriplanen.

Et plant konstruktionselement kan være udsat for begge belastningsarter samtidig, men så længe, der er tale om små deformationer og superpositionsloven gælder, kan de to tilfælde behandles separat.

Skivekræfter

Snitkræfterne normalkraften og forskydningskraften i symmetriplanen samt momentet, hvis vektor er vinkelret på symmetriplanen, betegnes normalt som skivekræfter.

Ved beregningen af skivekræfterne (snitkræfterne) i et plant konstruktionselement tages altså kun de kræfter i betragtning, som ligger i skivens plan (symmetriplan).

Skiver og plader:

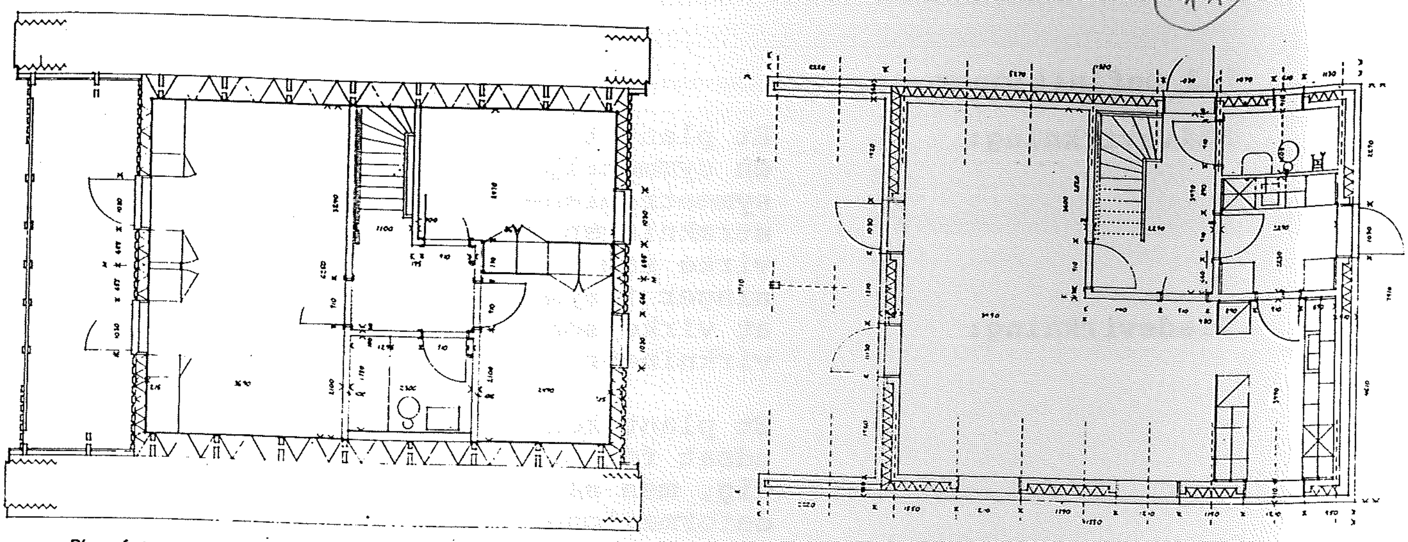
Som det fremgår, kan et plant konstruktionselement strengt taget ikke uden videre benævnes en skive eller en plade, hvis elementets statiske funktion ikke kendes. Det er imidlertid almindeligt at bruge de to benævnelser i flæng om plane konstruktionselementer, idet der dog skeles til deres primære statiske funktion, og det vil også være tilfældet i dette notat.

Skivefelter:

Ved et skivefelt forstås i dette notat et enkeltsammenhængende plant område, der kan overføre kræfter ved skivevirkning. Det kan f.eks. være et vægelement, eller dele deraf, eller en hel væg opbygget af flere vægelementer.

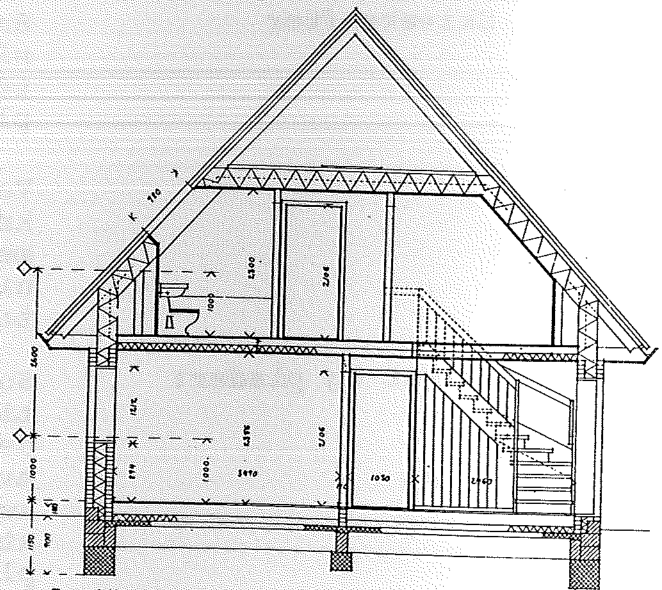
Skivebygning:

Der findes ingen klar definition af, hvad en skivebygning er. Normalt kaldes en bygningskonstruktion en skivebygning, hvis det kraftoverførende statiske system hovedsageligt består af skiver.

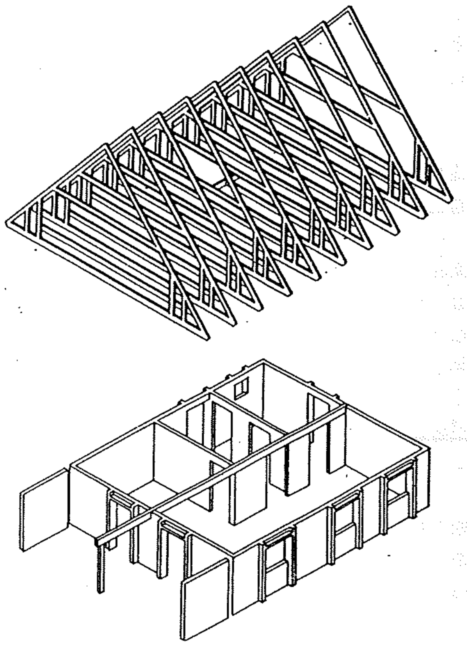


Plan af stueetage og tagetage.

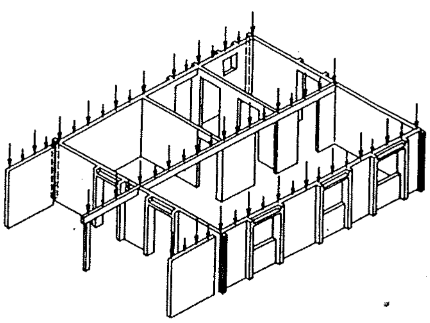
Figur 1.01



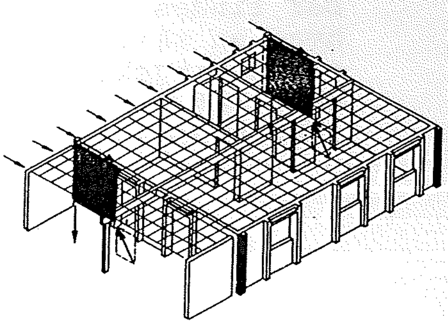
Tværsnit i lavenergihuset.



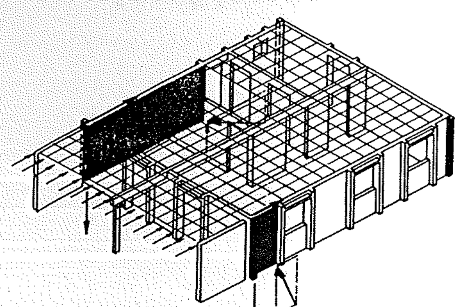
Isometri af bærende konstruktioner.



Optagelse af lodret belastning.



Optagelse af vandret belastning på tværs af huset.



Optagelse af vandret belastning på langs af huset.

Figur 1.02

Bærende system: De konstruktionselementer, der medvirker ved optagelsen af de lodrette belastninger på en bygning, siges at udgøre bygningens bærende system.

Afstivende system: Helt analogt siges de elementer, der medvirker ved optagelsen af de vandrette belastninger, at udgøre bygningens afstivende system.

De enkelte elementer i bygningen kan indgå både i det bærende og i det afstivende system, men ofte med forskellige statiske funktioner. Således kan et dækelement virke som plade i det bærende system, medens det virker som skive i det afstivende system.

1.3 Bygningens konstruktionsmodel

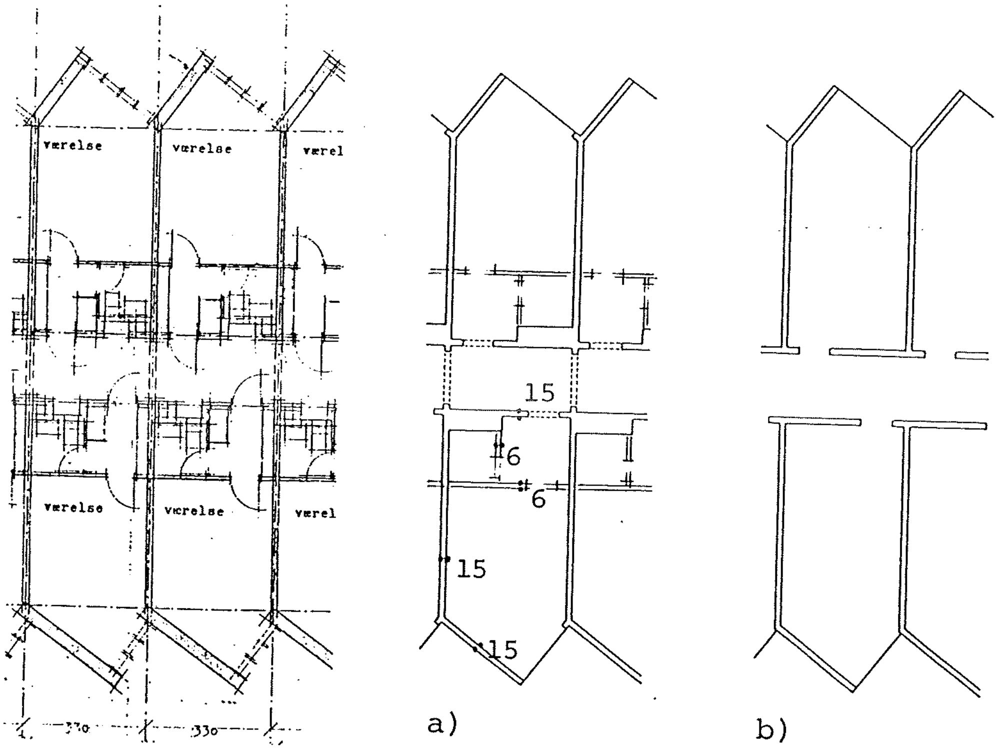
En bygnings konstruktionsmodel er - som allerede defineret - en bærende og afstivende konstruktion, som ligner den virkelige bygning rimeligt godt, hvad angår virkemåde, og som ingeniøren kan regne på.

Konstruktionsmodellen kan siges at være udtryk for en kvalitativ bedømmelse af lastnedføringsmulighederne.

Konstruktionsmodellen omfatter ikke blot et antal dele, men også en redegørelse for, i hvilke lastkombinationer de regnes virksomme ved lastnedføringen.

forenkling

Konstruktionsmodellen tilsigter også at være udtryk for en forenkling i forhold til det, der bygges. En forenklet model danner basis for beregningsmetoder, der gør beregningerne mindre omfangsrige eller i det hele taget praktisk mulige.



Figur 1.03 a) b)

For eksempel kan konstruktionsmodellen for en bygning med den på figur 1.03 viste etageplan (i udsnit) være den på figur b) viste.

Figur a) viser betonelementerne, dels 15 cm tykke, dels 6 cm tykke, og endvidere specialvægge med indbyggede skakte.

I b) er længdevæggen ved midterkorridorene regnet som en ret 15 cm væg, og der er set bort fra den lille vægstump ved knækket ved overgangen fra den indvendige tværvæg til den bærende ydervæg.

Der er i øvrigt set bort fra medvirken af forbindelsen (bjælken) over dørene i længdevæggen.

Det er endvidere kun de 15 cm tykke betonelementvægge, der medregnes; de 6 cm tykke betonelementvægge regnes ikke bærende (og disse elementer og deres fuger udformes ikke som kraftoverførende).

Både konstruktionsmodel og beregningsmetode skal vælges under hensyntagen til den ønskede beregningsnøjagtighed.

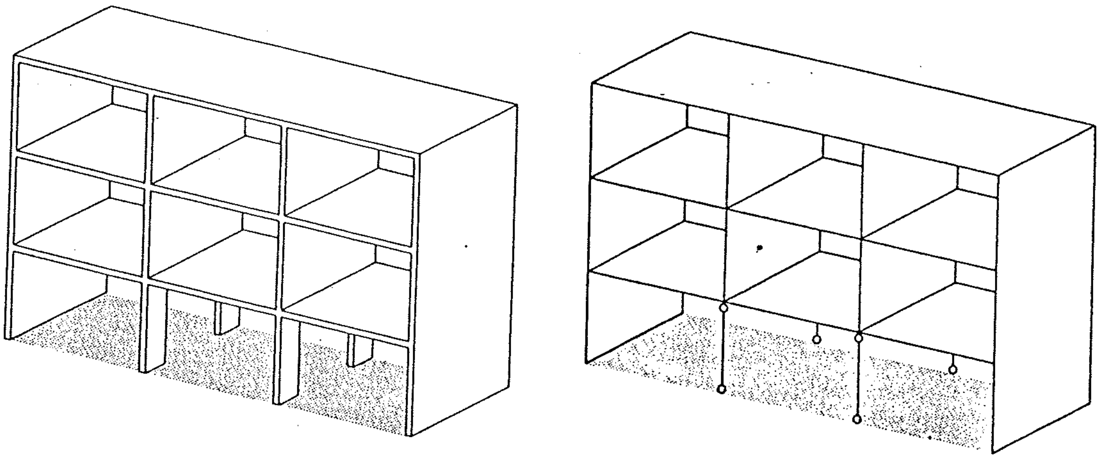
I tilfælde hvor nøjagtigheden ikke behøver at være særlig stor, kan man med en meget enkel konstruktionsmodel (og en simpel beregningsmetode) hurtigt få en størrelsesorden for spændinger og udbøjninger.

I tilfælde, hvor konstruktionsmodellen ikke stemmer alt for godt med den virkelige konstruktion, er der ingen grund til at benytte en fin beregningsmetode (som fremviser nogle tilsyneladende meget nøjagtige resultater).

> I en ikke for høj bygning, der har den på figur 3 viste etageplan vil det f.eks. være nøjagtigt nok at udregne spændingerne for vandret last på langs ad bygningen på baggrund af den i teksten vedr. figuren omtalte model, idet væggens tykkelse af andre grunde (f.eks. lyd- og brandforhold) gøres meget tykkere end nødvendigt af bæremæssige grunde.

I og med, at konstruktionsmodellen opstilles, sættes der også navn på delene: plade, bjælke, søjle, ramme, skive, gitter, skråstang o.s.v. efter bygningsdelenes statiske funktion og deres form; om ikke der rent bogstaveligt skrives navn på, så må det indirekte fremgå af modellen, hvordan delene er tænkt beregnet.

Også understøtningsform for delene og samlinger imellem dem må fastlægges; i hvert fald er det for nogles vedkommende nødvendigt at specificere understøtninger og samlinger for at få konstruktionsmodellen til at fremstå tilstrækkelig tydeligt.



Figur 1.04

Bygningen, der er skitseret på figur 1.04 har bærende gavle og tværvægge med så store åbninger i nederste etage, at det er rimeligt at opfatte mellemtværvæggen som skiver stående på (pendul-) søjler i nederste etage.

Modellens dele

Konstruktionsmodellen skal bestå af bygningsdele, der er (eller i hvert fald kan være) virksomme til optagelse af de belastninger, bygningen dimensioneres for.

bærende dele

I konstruktionsmodellen medtages i den bærende konstruktion til optagelse af lodret last: plader, bjælker, søjler, vægge m.v.

Der medtages kun dele, der forudses at forblive som permanent konstruktion, i et eller flere udvalgte materialer.

Figur 1.03 viser udsnit af en etageplan og en plan med konstruktionsmodellens bærende betonelementvægge i et byggeri, hvor der i øvrigt optræder ikke-bærende skillevægge i beton, samt en ikke-bærende let facade.

De udvalgte dele må også være de dele, der har de største stivheder i forhold til de andre, der forekommer, sådan at det også bliver de udvalgte konstruktionsdele, der vil bære lasten i den virkelige bygning.

afstivende dele i skivebygninger

For skivebygningers vedkommende medtages i den afstivende konstruktion til optagelse af vandret last:

vægge

1) plane vægge
2) vægprofiler

Det er her forudsat, at væggene er ført ned til fundament. Vægge, der er understøttet på søjler kan også i visse tilfælde medvirke i den afstivende konstruktion.

Herom senere under Bygningens beregning.

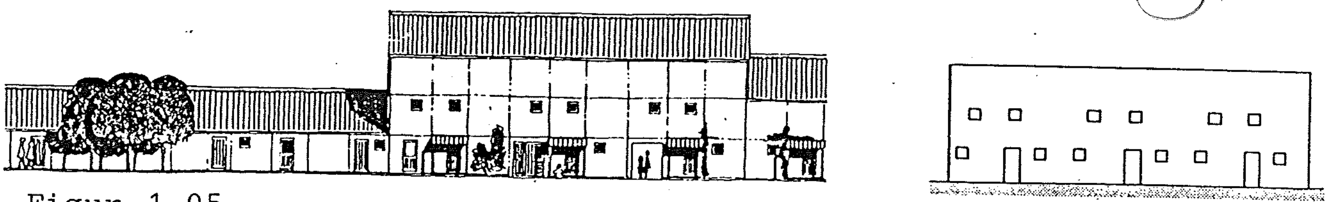
facader

Af andre former for afstivende konstruktion skal nævnes betonelementfacaden.

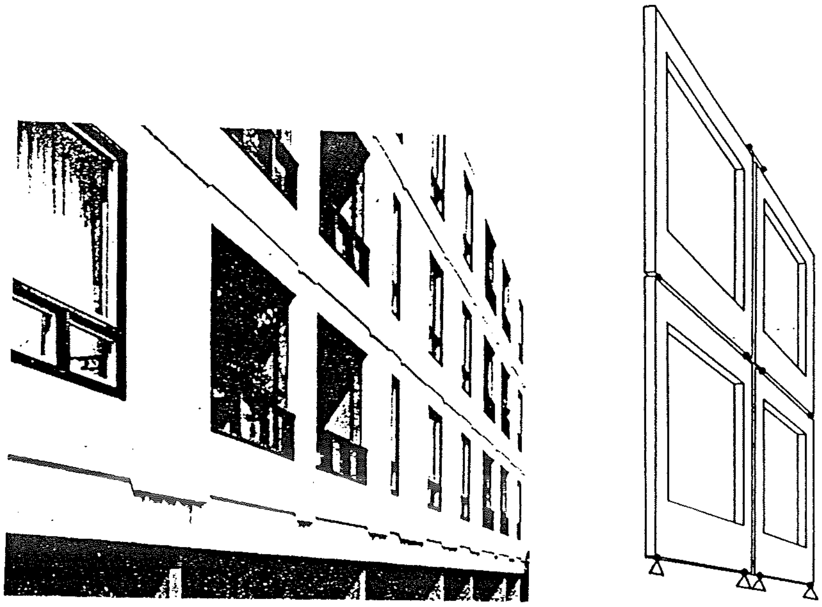
På figur 1.05 og 1.06 er vist eksempler på sådanne facader.

Facader med små vinduer, f.eks. som figur 1.05, kan beregnes som skiver.

Facader med store vinduer, f.eks. som figur 1.06, kan beregnes som rammer. Konstruktionsmodellen kan i dette tilfælde se ud som vist på figuren.



Figur 1.05



Figur 1.06

Udeladelser i modellen

I konstruktionsmodeller vil man sædvanligvis udelade visse dele, som egentlig er berettiget til at komme med, men som man ser bort fra for at få en enklere model, og som man kan udelade og alligevel få tilnærmelsesvis samme resultat af beregningerne.

Det drejer sig om f.eks. små "stumper" af vægge vinkelret på hoveddelen af væggen, se f.eks. figur 1.03.

I den afstivende konstruktion for vandret last drejer det sig endvidere om, f.eks. søjler og korte vægge med lille udstrækning i kraftretningen.

Mere detaljeret gennemgang af udeladelser senere, under Bygningens beregning.

regne på den sikre side

Det er meget almindeligt i ingeniørberegninger at regne "på den sikre side", hvilket i denne forbindelse vil sige, at vælge en konstruktionsmodel som ikke omfatter alle de dele, der godt kunne medtages, således at de spændinger og udbøjninger, der findes for en given last, bliver større end de vil være i den faktiske bygningskonstruktion.

Udeladelserne skal foretages med omtanke, og forholdene i de udeladte dele skal vurderes ud fra de fundne forhold (spændinger og deformationer) i de dele, der er taget med i modellen.

1.4 Beregningsforudsætninger i skivemodellen

Konstruktionsmodel

Skivekonstruktionen antages opbygget af plane elementer, der har endelig stivhed i deres plan, og som er uendelig slappe på tværs af deres plan (skiveplanet). Samlingerne mellem de plane elementer antages udført således, at de kun kan overføre skivekræfter. Denne model vil ikke kunne overføre pladekræfter, men udelukkende skivekræfter.

Geometri

For en given skivebygning fastlægges beregningsmodellens geometri som værende sammenfaldende med den geometriske figur, som symmetriplanerne for bygningens skiver danner.

Materialer

I beregningerne forudsættes det, at materialet kan regnes elastisk.

(17)

Belastninger

Beregningsmodellen fordrer, at de enkelte skivefelter kun udsættes for belastninger, der er beliggende i skiveplanet. Ved samlingen mellem to skivefelter, der ikke er beliggende i samme plan, skal belastningen kunne opløses til skivekræfter i de to skiveplaner, men belastningsresultanten behøver ikke at være beliggende i en af de to skiveplaner.

Belastningernes størrelse

For at beregningsmodellen kan anvendes, forudsættes det, at den ikke udsættes for større belastninger end, at der ikke sker brud i skiverne enten i form af tryk-, træk- eller forskydningsbrud eller i form af stabilitetsbrud.

Deformationernes størrelse

Endvidere forudsættes, at deformationerne er så små, at ligevægtsligningerne for den belastede model kan opstilles ud fra den ubelastede models geometri.

Lokal pladevirkning

Egenvægt af dækelementer, snebelastning på tagets dækelementer, vindpåvirkning på facadeelementer o.s.v. overføres lokalt ved pladevirkning af de respektive elementer til resten af skivekonstruktionen. I almindelige præfabrikerede husbygningskonstruktioner udføres samlingerne mellem disse elementer og resten af konstruktionen på en sådan måde, at elementerne er simpelt understøttede på enten vægskiver eller dækskiver. Pladebelastningen vil således af pladen overføres til resten af konstruktionen som skivekræfter, og beregningen af kraftforløbet uden for det belastede element vil kunne ske ved anvendelse af beregningsmodellen, der kun kan overføre skivekræfter.

Beregningsmodellens anvendelighed

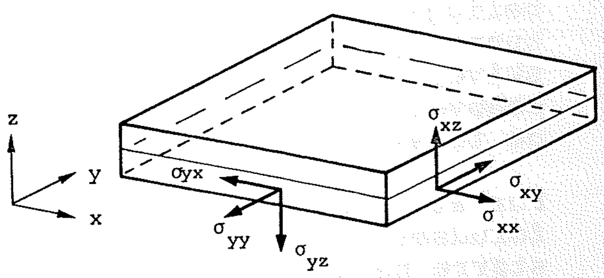
Beregningsmodellen kan derfor betragtes som en god tilnærmelse ved beregningen af kraftforløbet i almindelige præfabrikerede husbygningskonstruktioner, når det gælder beregningen af skivekræfterne.

Alle konstruktionselementer betragtes som vægtløse

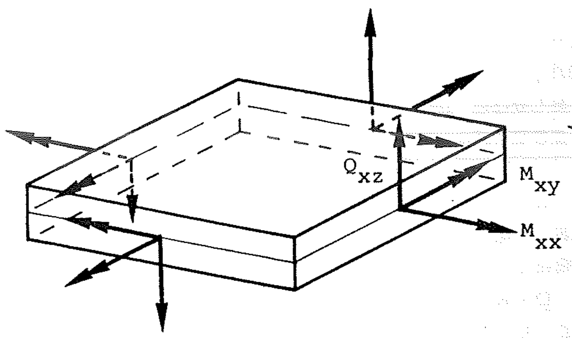
I det følgende betragtes alle skiver og andre konstruktionselementer som vægtløse.

I de tilfælde, hvor konstruktionselementernes egenvægt skal tages i regning, vil denne blive specificeret i form af enten en enkeltkraft i tyngdepunktet, eller som en jævnt fordelt belastning.

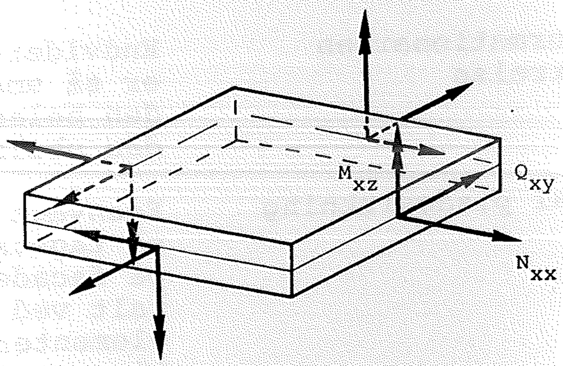
Figur 2.01.



a. Rektangulært felt udskåret af en skivekonstruktion. Randspændingerne kan i hvert punkt på randene udtrykkes ved tre spændingskomposanter.



b. Pladesnitkræfter.



c. Skivesnitkræfter.

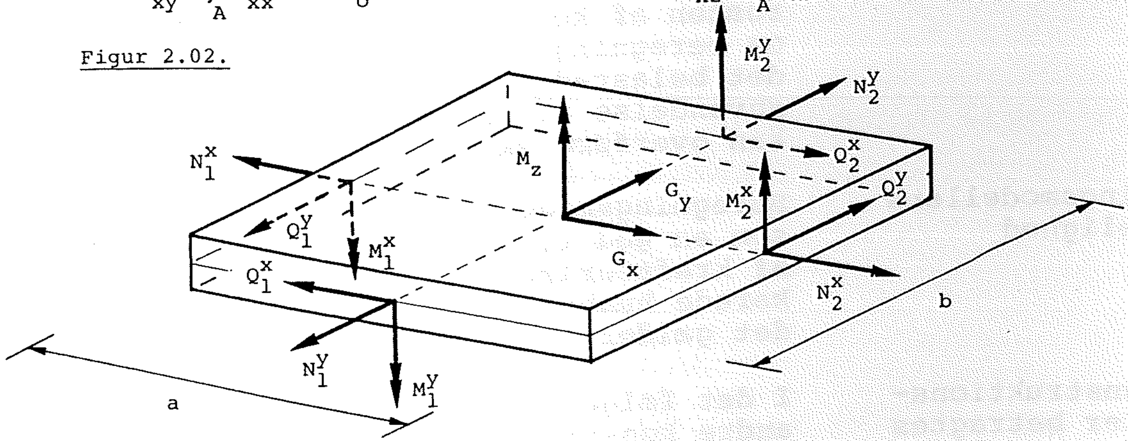
Randspændingerne kan for hver rand sammensættes til 6 uafhængige snitkræfter.

$Q_{xz} = \int_A \sigma_{xz} dA$ $\qquad$ $N_{xx} = \int_A \sigma_{xx} dA$

$M_{xx} = \int_A [(y - y_o)\sigma_{xz} - (z - z_o)\sigma_{xy}] dA$ $\qquad$ $Q_{xy} = \int_A \sigma_{xy} dA$

$M_{xy} = \int_A \sigma_{xx}(z - z_o) dA$ $\qquad$ $M_{xz} = \int_A \sigma_{xx}(y - y_o) dA$

Figur 2.02.



Rektangulært skivefelt udelukkende belastet med skivekræfter.
Ud over snitkræfter langs randene tænkes en ydre kendt belastning samlet i skivefeltets midtpunkt til de to kræfter G_x og G_y og momentet M_z .

Ligevægtsligningerne kræver kraftligevægt i x- og y-retning samt momentligevægt om z-aksen, d.v.s. :

$$N_1^x - N_2^x + Q_1^x - Q_2^x = G_x$$

$$N_1^y - N_2^y + Q_1^y - Q_2^y = G_y$$

$$M_1^y + M_1^x - M_2^y - M_2^x + \frac{b}{2}(Q_1^x + Q_2^x) - \frac{a}{2}(Q_1^y + Q_2^y) = M_z$$

2. STATISK BESTEMTE SKIVEKONSTRUKTIONER

I dette afsnit omtales den statiske beregning af de skivebygninger, hvor beregningen udelukkende kan baseres på de statiske ligevægtsbetingelser.

2.1 Ligevægtsbetingelser for skivefelter

Randspændinger

Skivekræfter

Pladekræfter

Udskæres et rektangulært felt (figur 2.01 a) af en skivekonstruktion, vil det langs sine fire rande (snitflader) være påvirket af randspændinger. Disse spændinger kan for hver rand sammensættes til seks af hinanden uafhængige kræfter (figur 2.01 b og 2.01 c). Normalkraften og forskydningskraften i skiveplanet samt momentet, hvis vektor er vinkelret på skiveplanet, betegnes normalt skivekræfterne, idet kun disse kan antage værdier $\neq 0$, når skivefeltet er belastet i sit plan (skivevirkning). Tilsvarende betegnes de tre andre pladekræfter, idet kun disse medvirker ved optagelsen af belastninger vinkelret på skivefeltets plan (pladevirkning).

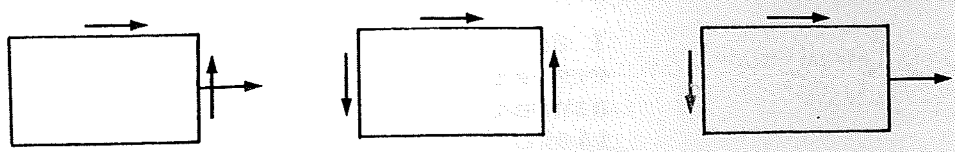
Denne fordeling af belastningsoptagelsen gælder kun, så længe belastningerne er så små, at der kan ses bort fra deformationerne ud af skiveplanet. Dette er dog altid tilfældet i almindelige husbygningskonstruktioner, og interessen vil i det følgende kun samle sig om de tre skivesnitkræfter.

For det rektangulære skivefelt gælder det (figur 2.02), at der ialt kan være tolv skivesnitkræfter. Disse skal i henhold til de statiske ligevægtsbetingelser danne et kraftsystem i ligevægt sammen med den belastning, der angriber i skiveplanet inden for randene.

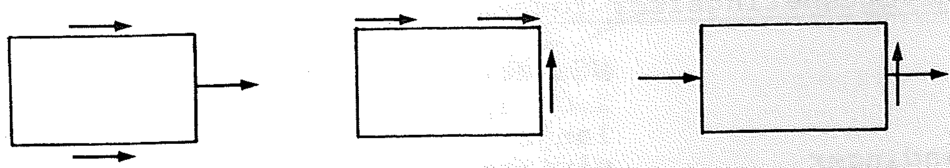
Ligevægtsbetingelser

Ligevægtsbetingelserne for et plant kraftsystem kan udtrykkes ved to projektionsligninger i ikke-parallelle retninger samt en momentligevægt om en akse vinkelret på skiveplanet (figur 2.02). Derved fås tre ligninger til fastlæggelse af de tolv snitkræfter.

Figur 2.03.

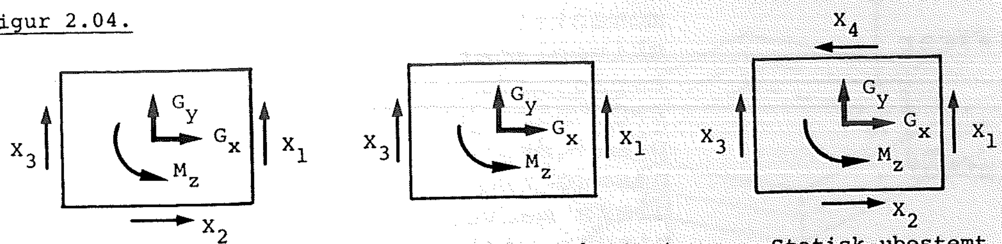


a. Skivefelter med tre statisk uafhængige snitkræfter.



b. Skivefelter med tre snitkræfter, der ikke er statisk uafhængige.

Figur 2.04.



a. Statisk bestemt skivefelt.

X_1, X_2 og X_3 er de tre statisk uafhængige ubekendte.

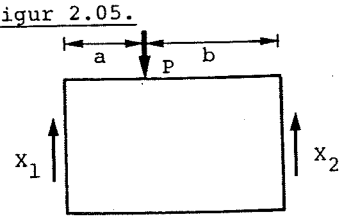
b. Statisk overbestemt skivefelt.

X_1 og X_3 er ubekendte.

c. Statisk ubestemt skivefelt.

X_1, X_2, X_3 og X_4 er ubekendte.

Figur 2.05.



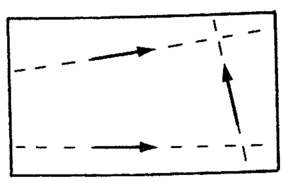
Et skivefelt kan i specielle tilfælde overføre en belastning, selvom der kun er 2 snitkræfter.

De 2 snitkræfter på figuren kan bestemmes ved hjælp af en projektionsligning i kraftretningen og en momentligning. Den anden projektionsligning vinkelret på kraftretningen er for den viste kraftretning altid opfyldt, så længe kræfterne forbliver parallelle.

Ligevægtsbetingelserne giver : $X_1 + X_2 = P$, og $X_1 a = X_2 b$.

Hvoraf : $X_1 = \frac{b}{a+b} P$ og $X_2 = \frac{a}{a+b} P$.

Figur 2.06.



Skivefelt med tre snitkræfter, der angriber inden for randene.

Definition af uafhængige snitkræfter på et skivefelt

Skal skivefeltets snitkræfter udelukkende kunne bestemmes af ligevægtsligningerne, betyder det, at kun tre af de tolv snitkraftstørrelser må være ubekendte, og at ligningssystemet, som dannes med de tre ubekendte, er af en sådan karakter, at det har en entydig løsning. Tre snitkræfter, der opfylder disse krav, betegnes (statisk) uafhængige snitkræfter. Begrebet statisk uafhængige snitkræfter omtales nærmere i kapitel 2.3 .

Generelt gælder det for et plan kraftsystem:

Sætning 2.01:

Et skivefelt med tre snitkræfter har statisk uafhængige snitkræfter, hvis snitkræfterne er

enten tre enkeltkræfter, der ikke alle skærer hinanden i samme punkt, og som ikke alle er parallelle,

eller to ikke parallelle enkeltkræfter og et moment.

På figur 2.03 er vist eksempler på skivefelter med tre uafhængige snitkræfter.

Definition af et statisk bestemt skivefelt

Sætning 2.02:

Kan et skivefelt udskæres på en sådan måde af en skivekonstruktion, at der ialt langs snittene kun er tre uafhængige snitkræfter, benævnes skivefeltet et skivefelt med statisk bestemte snitkræfter, eller kortere et statisk bestemt skivefelt.

I det tilfælde vil snitkræfterne nemlig umiddelbart kunne beregnes ved hjælp af de statiske ligevægtsbetingelser (se figur 2.04 a).

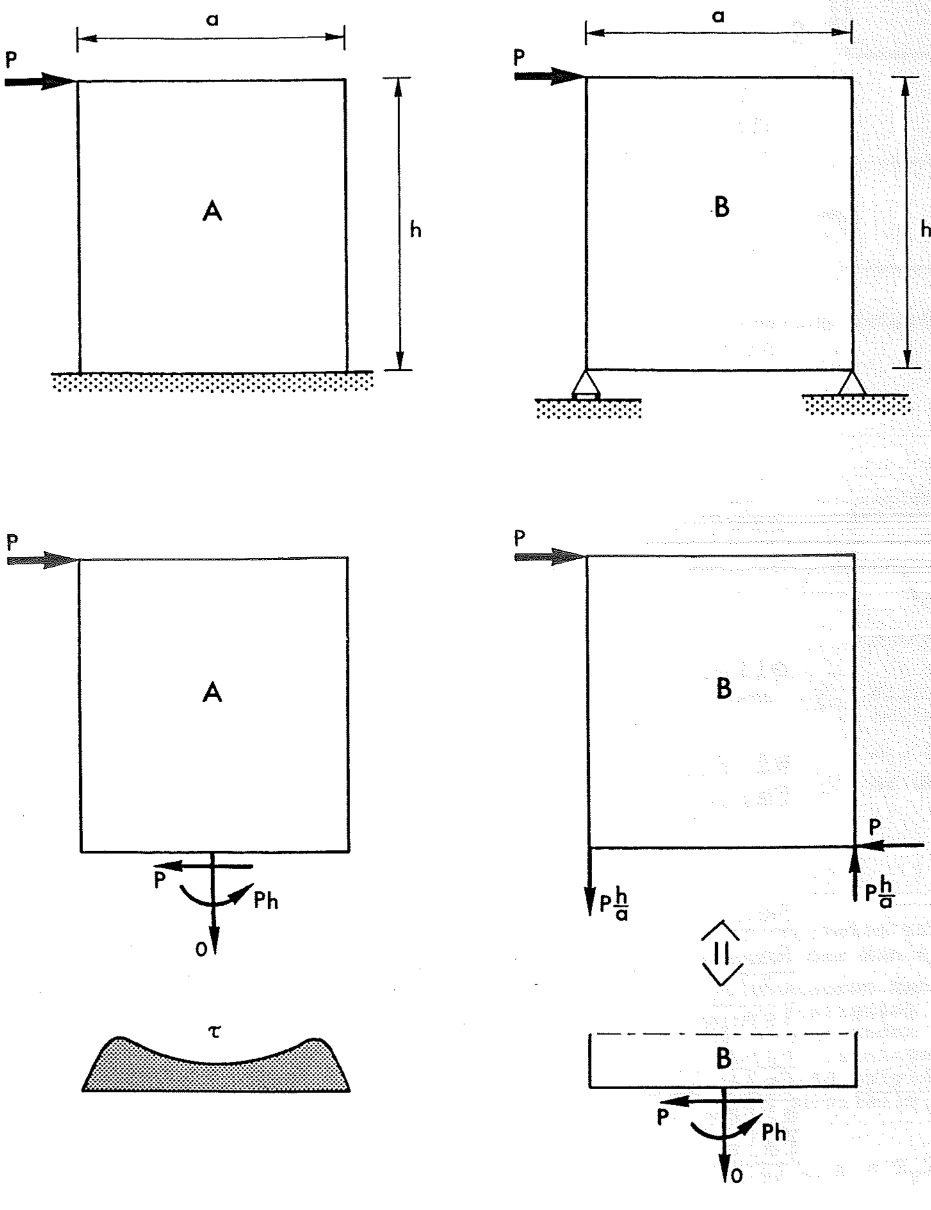
Statisk overbestemt skivefelt

Har skivefeltet færre end tre uafhængige snitkræfter, benævnes det et statisk overbestemt skivefelt, idet der er færre ubekendte, end der er ligevægtsligninger (se figur 2.04 b), og kun i meget specielle tilfælde vil alle tre ligninger samtidigt kunne opfyldes (se figur 2.05).

Statisk ubestemt skivefelt

Tilsvarende benævnes et skivefelt med mere end tre uafhængige ubekendte, et statisk ubestemt skivefelt (figur 2.04 c).

Figur 2.07.



På figuren er vist to ens skiver (skivefelter), hvor den ene, A, er "indspændt" og den anden, B, "simpelt understøttet" langs den nederste rand.

Udsat for den samme belastning, P, ses de resulterende snitkræfter langs den nederste rand at være identiske for de to skiver.

For skive A's vedkommende er endvidere vist forskydningsspændingernes fordeling langs den betragtede rand, hvis skiven er af et lineær elastisk materiale. For skive B's vedkommende er forskydningsspændingerne koncentreret omkring højre understøtningspunkt (uanset skivematerialet), og spændingsfordelingen afviger tydeligt fra skive A's.

De ubekendte snitkræfter kan i stedet for at angribe langs skivefeltets rande, angribe langs linier inden for skiverandene som vist på figur 2.06 (f.eks. langs samlingen med et andet skivefelt, der ikke er parallelt med det første). For disse snitkræfter gælder naturligvis de samme regler, som for snitkræfter langs randene.

Randspændingernes statiske bestemthed

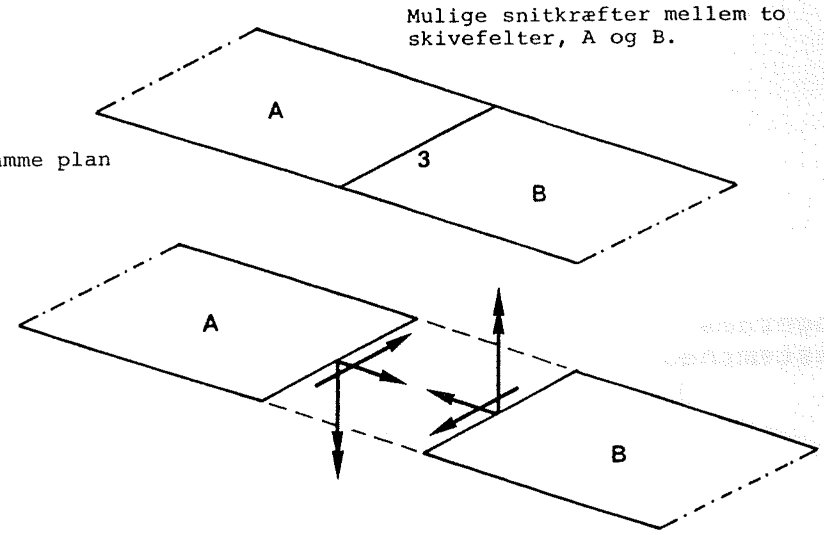
Den førnævnte statiske bestemthed gælder kun snitkræfterne og ikke generelt randspændingerne. D.v.s., at selv om de resulterende snitkræfter kan bestemmes ved hjælp af ligevægtsligningerne, så vil spændingsfordelingen ikke automatisk kunne bestemmes. Spændingsfordelingen vil afhænge af skivematerialet og geometrien af resten af den konstruktion, hvori skivefeltet indgår (se figur 2.07).

Figur 2.08.

Mulige snitkræfter mellem to skivefelter, A og B.

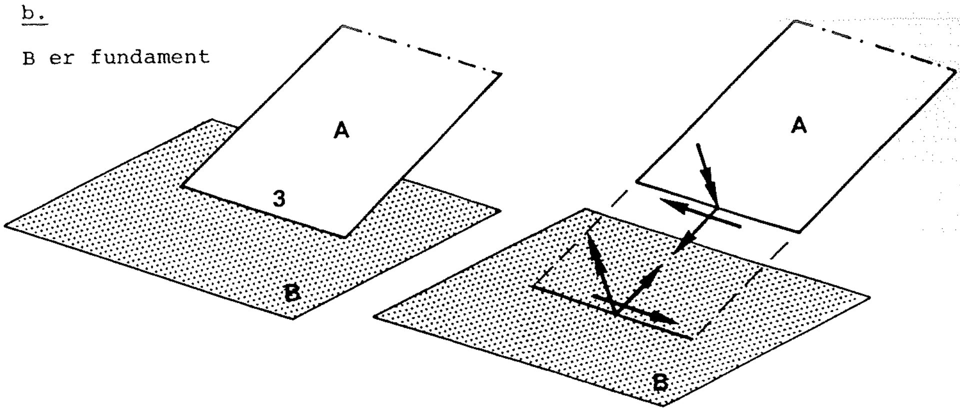
a.

A og B i samme plan



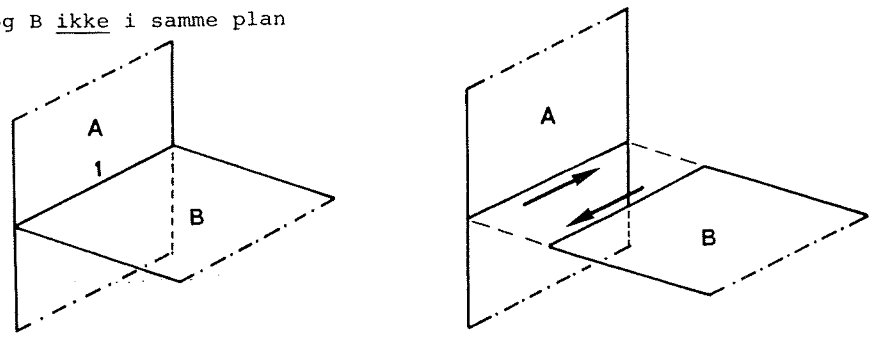
b.

B er fundament

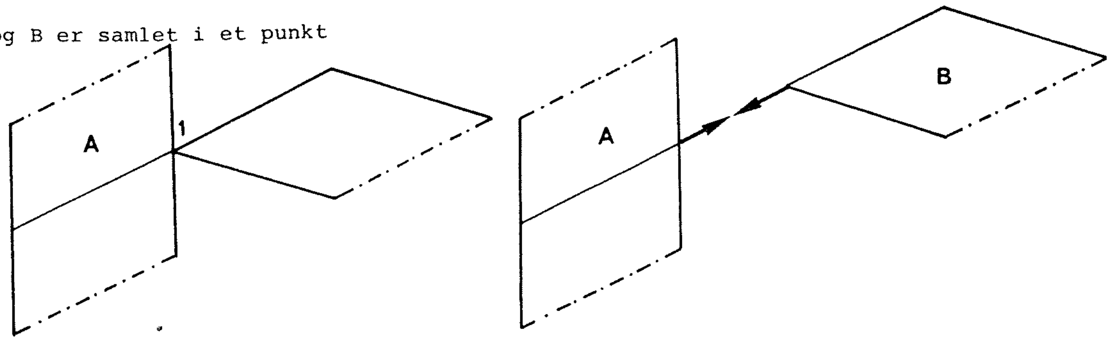


c.

A og B ikke i samme plan



A og B er samlet i et punkt



(24)

2.2 Mulige snitkræfter mellem skivefelter

Det er antaget om samlingerne mellem skivefelterne, at de kun kan overføre skivekræfter. De snitkræfter, der kan blive tale om i samlingerne, er følgende:

Sætning 2.03:

Skivefelter i samme plan

Mellem to skivefelter beliggende i samme plan (se figur 2.08 a) kan der i samlingen overføres normal- og forskydningsspændinger i skiveplanet, d.v.s., at der langs samlingen kan overføres normal- og forskydningskræfter, samt momenter med momentvektoren vinkelret på skiveplanen.

3-tallet på figur 2.08 a antyder, at der langs samlingen kan være 3 ubekendte snitkræfter.

Denne regel gælder også i samlingen mellem et skivefelt og et fundament uanset vinklen, skivefeltet danner med fundamentsfladen (se figur 2.08 b).

Sætning 2.04:

Skivefelter, der ikke er i samme plan

Mellem to skivefelter, der ikke er beliggende i samme plan (se figur 2.08 c), kan der i samlingen kun overføres forskydningsspændinger, d.v.s., at der langs samlingen kun kan overføres en forskydningskraft.

Analogt er der angivet et 1-tal langs samlingen, for at antyde at der langs samlingen kun kan være én ubekendt snitkraft.

Ud fra disse sætninger om mulige snitkræfter i samlingerne mellem skivefelter, er det nu muligt at bestemme det samlede antal ubekendte snitkræfter, der kan optræde i samlingerne mellem de skivefelter, som en skivekonstruktion kan opdeles i (se figur 2.09 a).

Opdelingen af en skivekonstruktion i skivefelter er ikke entydig, sådan at forstå, at skivekonstruktionen på forskellig måde kan opdeles i skivefelter med det dertil hørende forskellige antal ubekendte snitkræfter mellem skivefelterne se figur 2.09 b).

Figur 2.09. — Opdeling i skivefelter

a.

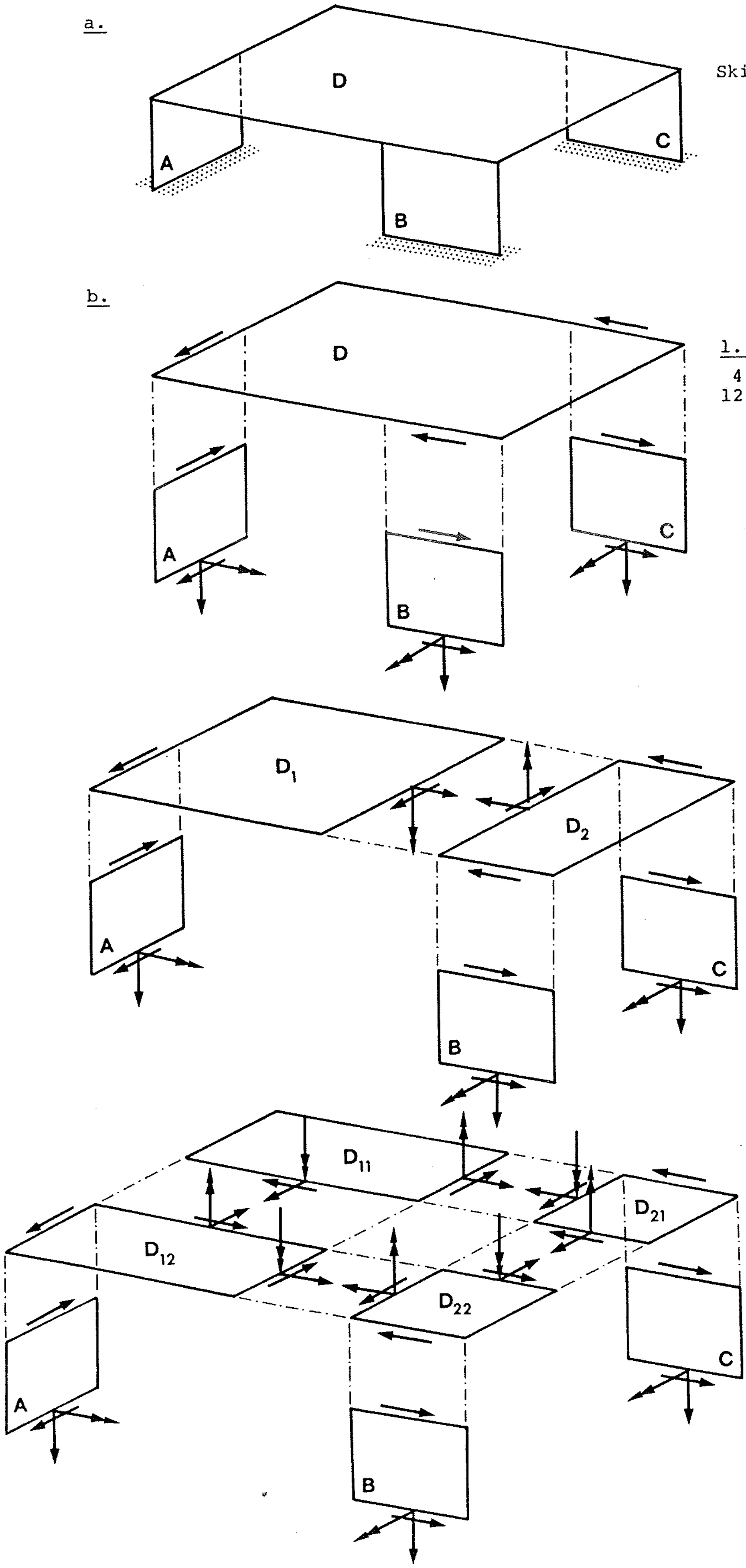
Skivekonstruktion

b.

1. opdeling
4 skivefelter
12 ubekendte snitkræfter

2. opdeling
5 skivefelter
15 ubekendte snitkræfter

3. opdeling
7 skivefelter
24 ubekendte snitkræfter



(26)

Om opdelingen af skivefelter gælder der:

Opdeling af skivefelter

<u>Sætning 2.05</u>:

<u>Deles et skivefelt i to nye skivefelter, vil det samlede antal snitkræfter i samlingerne i en skivekonstruktion øges med mindst tre.</u>

De tre hidrører fra samlingen mellem de to nye felter, medens resten stammer fra en eventuel deling af en rand, langs hvilken der før opdelingen virkede ubekendte snitkræfter.

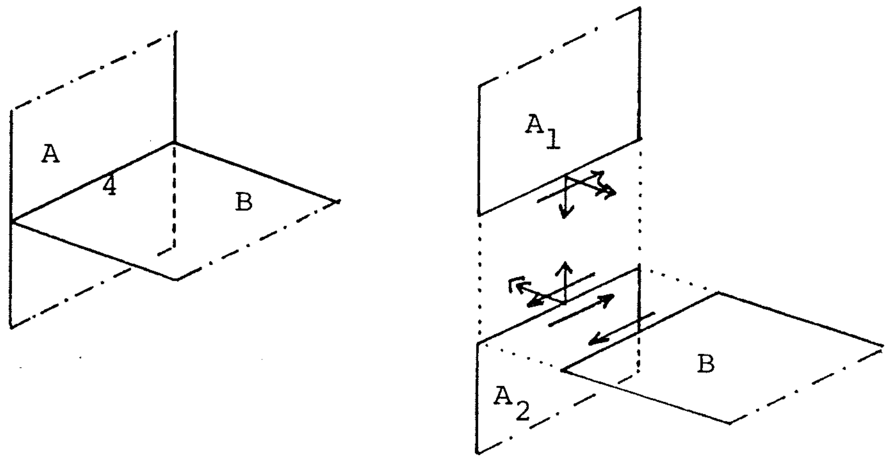
Vi kan derfor udvide sætning 2.04 følgende:

<u>Sætning 2.06</u>:

<u>Mellem tre skivefelter, hvoraf to er beliggende i samme plan (se nedenstående figur), kan der overføres 4 ubekendte snitkræfter</u>.

Det svarer til, at skivefelt A på figur 2.08 c deles i to skivefelter.

<u>Figur 2.10</u>



2.3 Statisk bestemte skivekonstruktioner opbygget af skivefelter

I lighed med definitionen af et statisk bestemt skivefelt (sætning 2.02) defineres:

Sætning 2.07:

Definition af statisk bestemt skivekonstruktion

En skivekonstruktion er statisk bestemt med hensyn til skivekræfter, hvis skivesnitkræfterne i samlingerne mellem skivefelterne kan bestemmes alene ved hjælp af de statiske ligevægtsbetingelser.

Fastlæggelsen af de mulige snitkræfter i en skivekonstruktion for en given opdeling i skivefelter er omtalt i forrige kapitel. Til bestemmelse af disse ubekendte snitkræfter vil der for hvert skivefelt kunne opstilles tre ligevægtsligninger for skivefeltets snitkræfter. Deraf fås følgende regel til fastlæggelse af, om en skivekonstruktion er statisk bestemt.

Fastlæggelse af statisk bestemthed

Definition af R og N

Sætning 2.08:

Er en skivekonstruktion opdelt i N skivefelter, hvor hvert felt har mindst tre ubekendte og uafhængige snitkræfter, og er der ialt R ubekendte og indbyrdes uafhængige snitkræfter langs samlingerne mellem felterne, da er skivekonstruktionen statisk bestemt med hensyn til disse snitkræfter, hvis $R = 3N$.

$R = 3N$
$R > 3N$

Det betyder, at en vilkårlig ydre belastning, der angriber en skivekonstruktion (som beskrevet i sætning 2.08), og som angriber i en af skivefelternes planer, vil kunne optages af konstruktionen udelukkende ved skivekræfter, når $R \geq 3N$. For $R = 3N$ vil snitkræfterne være statisk bestemte, mens de for $R > 3N$ er statisk ubestemte, hvis betingelserne i sætning 2.08 i øvrigt er opfyldt.

$R < 3N$ eller mindre end 3 snitkræfter pr. skivefelt

For $R < 3N$, eller hvis et skivefelt har færre end tre ubekendte og uafhængige snitkræfter, vil konstruktionen ikke kunne overføre vilkårlige ydre belastninger i et af skivefelternes planer udelukkende ved skivekræfter.

Det kan dog ske, at en skivekonstruktion er således opbygget, at den består af en statisk bestemt del plus en række skivefelter med kun to ubekendte snitkræfter. Konstruktionen vil da kunne optage ydre

30

Om løsning af et lineært ligningssystem gælder i henhold til den lineære algebra ([2] sætning 12.1):

Fra den lineære algebra vides ([2] sætning 12.1):

"Dersom det for et lineært ligningssystem med n ubekendte gælder, at totalmatricen har en højere rang end koefficientmatricen, har ligningssystemet ingen løsning. Har de to matricer samme rang r, vil systemet have én løsning for r = n, men en (n - r)-dobbelt uendelighed af løsninger for r < n."

Koefficientmatricen er den matrix, der kan dannes af koefficienterne til de ubekendte, medens totalmatricen er den matrix, koefficientmatricen danner sammen med ligningssystemets højresider.

En matrix siges at have rangen r, dersom der i matricen findes mindst én underdeterminant af r'te orden, der er forskellig fra nul, mens alle underdeterminanter af højere end r'te orden (hvis sådanne findes) er lig med nul.

belastning, hvis denne angriber i de skivefelter, der indgår i den statisk bestemte del. Om noget sådant er tilfældet kan undersøges ved at se bort fra skivefelterne med to ubekendte snitkræfter og de tilhørende snitkræfter ved optællingen af de ubekendte snitkræfter og af skivefelterne. Er R ≥ 3 N for den resterende konstruktion, vil denne del være i stand til at optage en ydre belastning ved skivekræfter.

Statisk uafhængige snitkræfter

Kravet til de R snitkræfter i sætning 2.08 er, at de skal være statisk uafhængige. Dette begreb er allerede defineret for et skivefelts snitkræfter i kapitel 2.1, og definitionen skal her udvides til at omfatte snitkræfterne i en skivekonstruktion. Kravet skyldes, at de 3 N ligevægtsligninger mellem de R ubekendte snitkræfter danner et inhomogent lineært ligningssystem, som kun i visse tilfælde har en entydig løsning forskellig fra nul.

Om statisk uafhængige snitkræfter i en skivekonstruktion kan da siges:

Sætning 2.09:

Kan ligningssystemet, dannet af de statiske ligevægtsligninger med de søgte snitkræfter og en vilkårlig ydre last, løses - ikke kun for specielle belastninger, da er snitkræfterne statisk uafhængige.

I den lineære algebra kan hentes hjælp angående løsning af et lineært ligningssystem. Se modstående side.

De 3 N ligninger med R ubekendte, vil i tilfældet 3 N = R danne et kvadratisk ligningssystem, og dette har kun en entydig løsning, hvis koefficientmatricens determinant er forskellig fra nul. Derfor defineres:

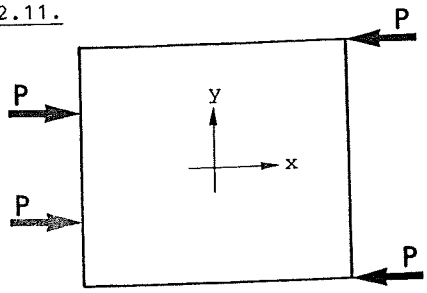
Sætning 2.10:

Definition af statisk uafhængige snitkræfter

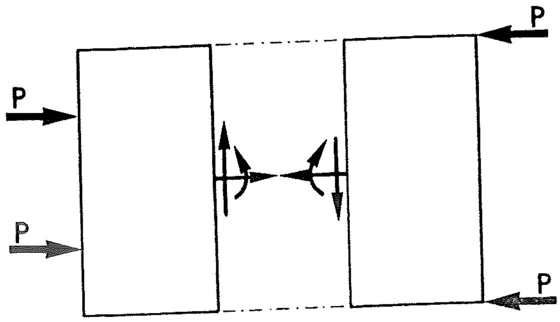
Et sæt statisk uafhængige snitkræfter er et sæt snitkræfter, af hvis statiske ligevægtsbetingelser, der kan dannes et ligningssystem, hvis koefficientmatrix har en determinant, der er forskellig fra nul.

Figur 2.11.

a.

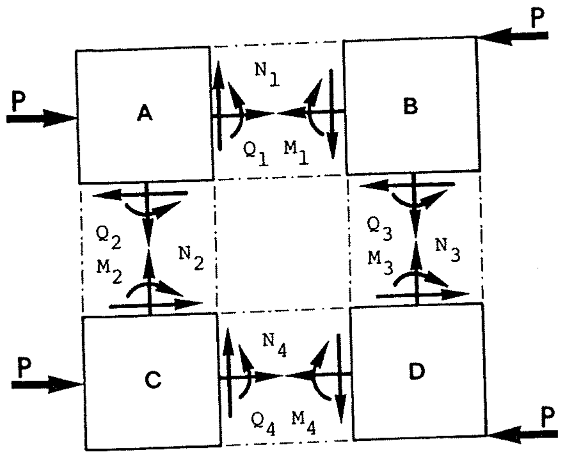


b.



Opdelingen har statisk uafhængige snitkræfter

c.



Opdelingen har $N = 4$ og $R = 12$.

Hver skivefelt har statisk uafhængige snitkræfter.

Skivekonstruktionen sammensat af de 4 skivefelter har imidlertid <u>ikke</u> statisk uafhængige snitkræfter.

<u>Bevis:</u> Ligevægtsbetingelserne i x-retningen for de 4 skivefelter er:

Skivefelt A : $N_1 - Q_2 = -P$

Skivefelt B : $-N_1 - Q_3 = P$

Skivefelt C : $N_4 + Q_2 = -P$

Skivefelt D : $-N_4 + Q_3 = P$

Disse er ikke indbyrdes uafhængige, idet en addition af A's og B's ligning giver

$$-Q_2 - Q_3 = 0$$

og en addition af C's og B's ligning giver

$$Q_2 + Q_3 = 0$$

De to nye ligninger er ens, og koefficientmatricens determinant er derfor lig nul.

For et skivefelt kræves altså, at sættet indeholder mindst 3 snitkræfter, og for en skivekonstruktion med N skivefelter mindst 3 N snitkræfter.

Det skal her fremhæves, at de statisk uafhængige snitkræfter nøje er forbundet til den konstruktion, hvori de er snitkræfter, i modsætning til andre rumlige kraftsystemer, der kan være uafhængige af hvilken konstruktion, de virker på.

Eftersom 3 N x 3 N matrix med rangen 3 N ikke kan have underdeterminanter med værdien nul fås følgende:

<u>Sætning 2.11</u>:

<u>En nødvendig betingelse for at en skivekonstruktions snitkræfter er statisk uafhængige er, at snitkræfterne til enkelte skivefelter er statisk uafhængige.</u>

Denne sætning, der lidt overflødigt er medtaget i sætning 2.08, kan være en hjælp ved undersøgelse af, om et sæt snitkræfter i en skivekonstruktion er statisk uafhængige. At det ikke er en tilstrækkelig betingelse, fremgår af eksemplet, der er vist på figur 2.11 .

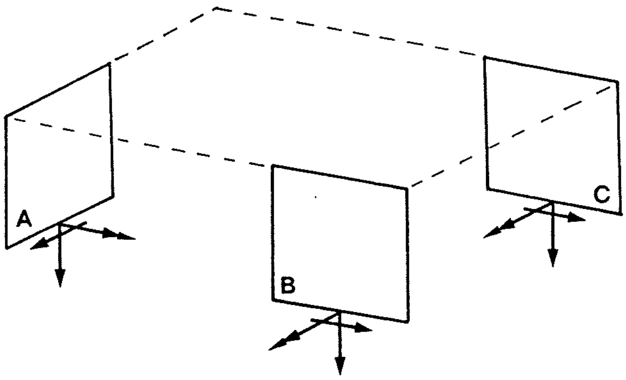
Begrebet statisk uafhængige snitkræfter i den her givne definition findes, så vidt det er forfatteren bekendt, ikke andre steder i den danske litteratur, der omhandler statiske problemer. Derimod er problematikken omtalt flere steder for andre statiske systemer, f.eks. stangsystemer, men betegnelsen statisk uafhængige snitkræfter er ikke anvendt, idet de pågældende snitkraftssæt ikke er blevet forsynet med specialbetegnelse.

De statisk uafhængige snitkræfter skal ikke forveksles med begrebet lineært uafhængige (kraft-)vektorer.

I det tre-dimensionale rum kan højst tre vektorer være lineært uafhængige, idet ingen af de tre skal kunne udtrykkes ved linearkombinationer af de to andre.

Betegnelsen "uafhængige snitkræfter" hidrører fra, at ligevægtsligningerne skal danne et lineært uafhængigt ligningssystem for at kunne løses entydigt i det statisk bestemte tilfælde.

Figur 2.12.



Som der vises senere i eksempel 2.03, er den på figur 2.09 a viste skivekonstruktion statisk bestemt i den på figur 2.09 b viste 1. opdeling.

I henhold til sætning 1.4-6 kan et skivefelt med tre uafhængige snitkræfter fjernes, uden at det ændrer den statiske bestemthed i den resterende del af konstruktionen. Dækskiven D opfylder denne betingelse, og hvis den fjernes, vil de tre vægskiver A, B og C stå tilbage, som vist på ovenstående figur.

Disse kan strengt taget ikke betragtes som én konstruktion, men de vil hver for sig kunne optage belastninger, der virker i deres planer, og snitkræfterne vil være statisk bestemte. Ud fra de i dette kapitel anvendte definitioner vil en fristående væg i teorien altså også være at betragte som en skivekonstruktion.

(33)

Hvordan undersøges om et sæt snitkræfter i en skivekonstruktion er statisk uafhængige

Det har ikke været muligt at finde frem til en enkel fremgangsmåde, hvormed det fastslås, om et sæt snitkræfter er statisk uafhængige. Kun for de enkelte skivefelter er det forholdsvis enkelt, idet der kun findes få variationer på snitkraftkombinationer (jfr. figur 2.03).

Generelt kan det kun anbefales at undersøge, om sætning 2.11 er opfyldt, og hvis det er tilfældet, samtidig med at $R = 3\,N$, søges snitkræfterne beregnet. Kan de beregnes, er de statisk uafhængige, ellers ikke. Eventuelt kan koefficientmatricens determinant beregnes. Hvis den er forskellig fra nul, er snitkræfterne statisk uafhængige, ellers ikke. Efter Sætning 2.13 er angivet endnu en fremgangsmåde, der kan bruges ved undersøgelse af, om snitkræfterne er statisk uafhængige.
I næste kapitel 2.4 gennemgås eksempler på, hvordan en given skivekonstruktion vurderes for statisk bestemthed, men inden da skal der omtales nogle regler, som kan uddrages af reglen til fastlæggelse af statisk bestemthed (sætning 2.08). Det drejer sig om følgende:

Sætning 2.12:

Bevarelse af statisk bestemthed ved opdeling

Deles i en skivekonstruktion et skivefelt i to nye, vil den statiske bestemthed være uændret, hvis der ved delingen kun dannes tre nye snitkræfter.

Beviset for dette er, at N øges med 1 og R med 3, d.v.s. at $R = 3\,N$ fortsat gælder.

Under projekteringen af en skivebygning kan det forekomme, at der ønskes tilføjet eller fjernet et skivefelt (f.eks. et eller flere vægelementer) et sted i konstruktionen, og i den forbindelse gælder der:

Sætning 2.13:

Tilføjelse eller fjernelse af skivefelter

Et skivefelt med tre ubekendte og indbyrdes uafhængige snitkræfter kan altid tilføjes eller fjernes i en statisk bestemt skivekonstruktion, uden at dette ændrer den statiske bestemthed i den resterende del af konstruktionen (se figur 2.12).

Beviset er igen, at der til N enten føjes eller fratrækkes 1, mens R tilsvarende øges eller formindskes med 3. $R = 3\,N$ gælder således hele tiden.

Ang. undersøgelse statisk uafhængige snitkræfter

Af denne sætning kan udledes endnu en fremgangsmåde til fastlæggelse af, om et sæt snitkræfter i en skivekonstruktion er statisk bestemte. Fjernes alle skivefelter med netop tre statisk uafhængige snitkræfter fra skivekonstruktionen, vil den resterende konstruktion være enklere at undersøge, idet der vil være færre skivefelter. Er dennes snitkræfter statisk uafhængige, vil dette også være tilfældet for snitkræfterne i den oprindelige skivekonstruktion.

Ud fra definitionen af skivefelter, som enkeltsammenhængende plane områder, kan der sluttes, at der må være et minimalt antal skivefelter, som en skivekonstruktion kan opdeles i (f.eks. den første opdeling i figur 2.09). Af sætningerne 2.12 og 2.13 fås derfor):

Sætning 2.14:

Opdeling med minimal grad af statisk bestemthed

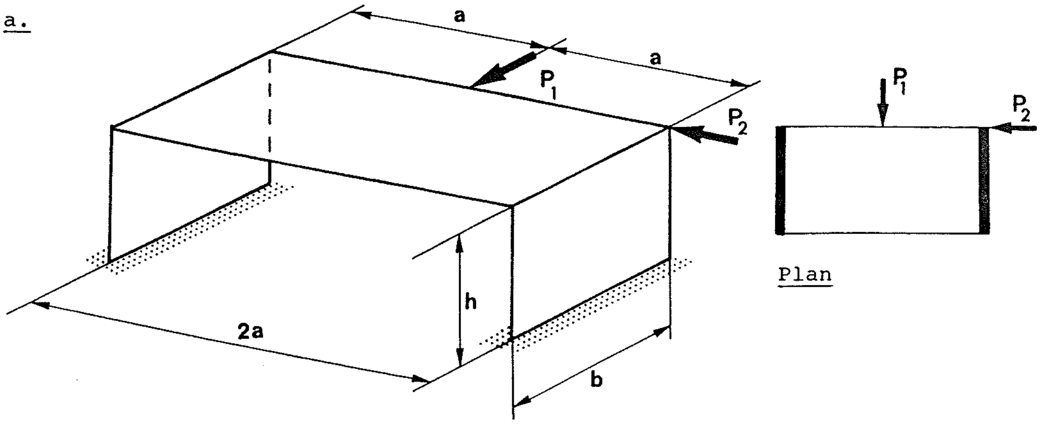
Er en skivekonstruktion opdelt i det minimale antal skivefelter, vil en yderligere opdeling ikke mindske graden af statisk bestemthed.

D.v.s., at skivekonstruktionen, der ved opdelingen med det minimale antal skivefelter viser sig at være statisk ubestemt med hensyn til snitkræfterne, ikke ved yderligere opdeling kan gøres statisk bestemt.

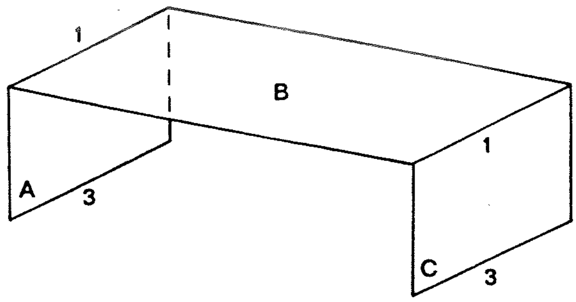
(37)

Figur 2.13.

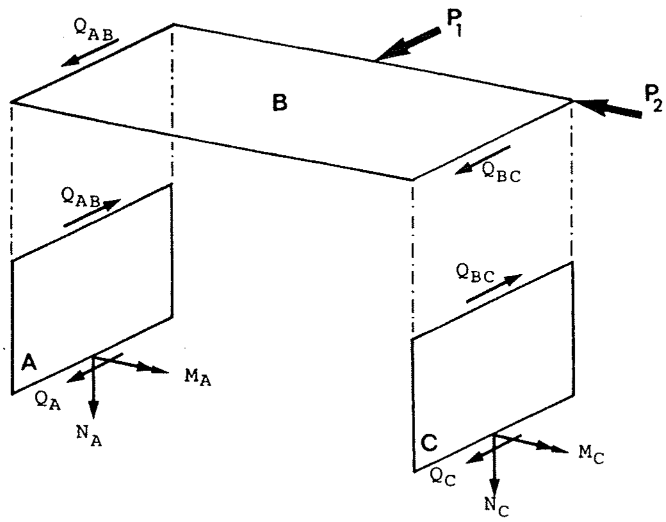
a.



b.



c.



(36)

2.4 Undersøgelse af en skivekonstruktions statiske bestemthed og beregning af snitkræfter

Ved hjælp af de regler, der blev opstillet i forrige kapitel, skal der i dette kapitel vises eksempler på, hvordan det kan fastlægges, om en given skivekonstruktion er statisk bestemt eller ej. Det primære formål med undersøgelsen er naturligvis at få optalt antallet af skivefelter (N) og antallet af uafhængige snitkræfter (R), og derefter at undersøge om 3 N = R (sætning 2.08).

Fremgangsmåde til fastlæggelse af statisk bestemthed

En nærliggende fremgangsmåde er følgende:

1) Opdel skivekonstruktionen i det minimale antal skivefelter.
2) Angiv med tal ved samlingerne antallet af mulige snitkræfter langs de enkelte samlinger.
3) Optæl antallet af skivefelter (N) og antallet af snitkræfter (R) i hele skivekonstruktionen.
4) Undersøg om 3 N = R.
5) Undersøg om alle skivefelter har mindst tre snitkræfter, som er statisk uafhængige.
6) Undersøg om skivekonstruktionens snitkræfter er statisk uafhængige.
7) Hvis 4), 5) og 6) er opfyldt, er skivekonstruktionen statisk bestemt.

Eksempel 2.01.

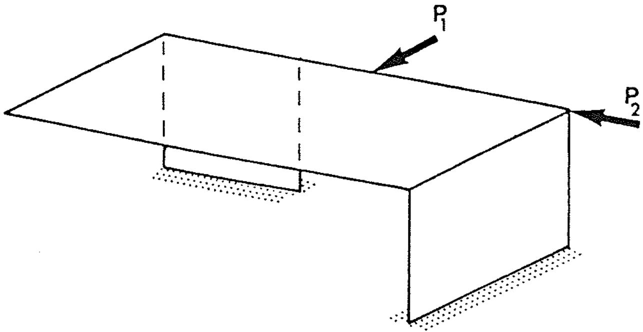
To parallelle vægskiver

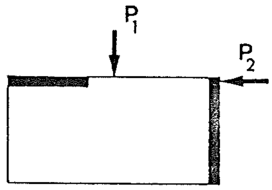
På figur 2.13 a er vist en skivekonstruktion bestående af en dækskive, der er understøttet af to parallelle vægskiver. Det skal undersøges, om konstruktionen er statisk bestemt, hvorefter snitkræfterne langs vægskivernes understøtninger ønskes bestemt for de to belastninger P_1 og P_2.

Først opdeles i det minimale antal skivefelter (A, B og C), som vist på figur 2.13 b, svarende til dækskiven og de to vægskiver. Langs samlingerne mellem vægskiver og dækskiven vil der i hver samling kun være én snitkraft mulig, da skivefelterne ikke ligger i samme plan (sætning 2.04). Langs samlingerne mellem vægskiver og fundament vil der i hver samling være tre mulige snitkræfter (jfr. sætning 2.03).

Figur 2.14.

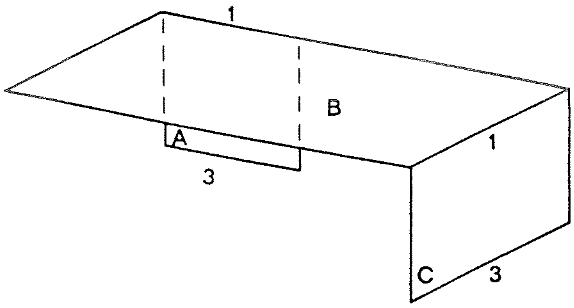
a.



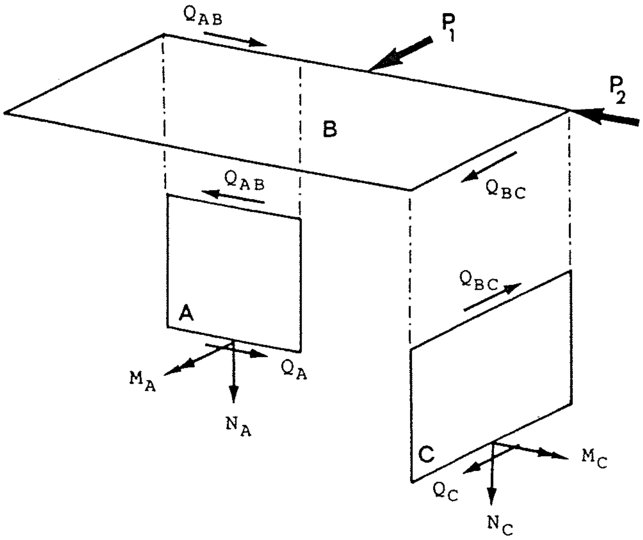


Plan

b.



c.



En optælling giver N = 3 og
$R = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8$. D.v.s., $3N > R$.
Skivekonstruktionen er således statisk overbestemt, og kan generelt ikke overføre vilkårlige kræfter, der angriber i en af skiveplanerne ved skivekræfter alene. Da skivefelt B kun har to snitkræfter, ses desuden, at det andet krav i sætning 2.08 om mindst tre snitkræfter pr. skivefelt heller ikke er opfyldt.

Kraften P_1 kan dog optages ved skivekræfter, idet den i dette specielle tilfælde (jfr. figur 2.05) kan overføres af skivefelt B's to snitkræfter.

Der gælder

$$Q_{AB} = Q_{BC} = -\frac{1}{2} P_1$$

$$Q_A = Q_{AB} = -\frac{1}{2} P_1$$

$$M_A = M_C = h\, Q_{AB} = -\frac{1}{2} P_1\, h$$

Derimod kan kraften P_2 ikke overføres af skivefelt B, idet dette mangler snitkræfter i P_2's retning.

Eksempel 2.02.

To ikke-parallelle vægskiver

Flyttes vægskiven A, som vist på figur 2.14 a , om som længdevæg, vil konstruktionen stadig være statisk overbestemt, da antallet af skivefelter og snitkræfter er det samme som i forrige eksempel.

I dette tilfælde vil kraften P_2 dog kunne optages af konstruktionen, idet den føres direkte ned af vægskive A, hvorimod kraften P_1 ikke kan optages.

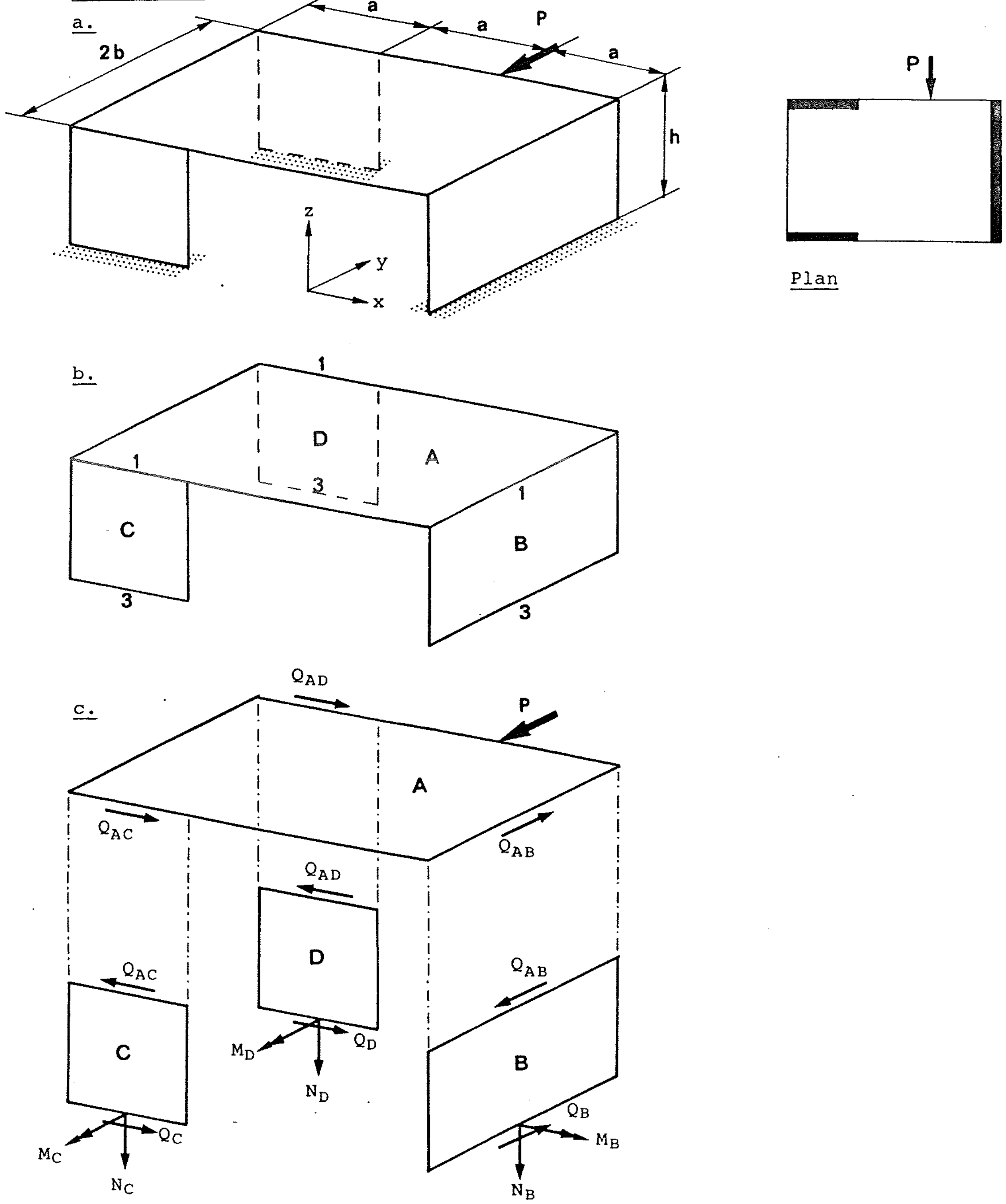
Som det fremgår af disse to eksempler skal en dækskive understøttes på mere end to vægskiver for at kunne indgå i en statisk bestemt eller ubestemt skivekonstruktion (sætning 2.08). Dækskiven skal jo også have mindst tre snitkræfter, så mindre end tre vægskiver kan selvfølgelig ikke give en statisk bestemt skivekonstruktion. Eksempler på sådanne skivekonstruktioner undersøges derfor nu.

Eksempel 2.03.

To parallelle + en tværgående vægskive

På figur 2.15 er vist en skivekonstruktion bestående af en dækskive, der er understøttet af tre vægskiver. Det skal

Figur 2.15.



d. Ligevægtsligningerne:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
h & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
Q_{AB} \\ Q_{AC} \\ Q_{AD} \\ N_B \\ Q_B \\ M_B \\ N_C \\ Q_C \\ M_C \\ N_D \\ Q_D \\ M_D
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
$$

Determinantværdi $= -2b \neq 0$

undersøges, om konstruktionen er statisk bestemt. I bekræftende fald ønskes snitkræfterne langs vægskivernes understøtninger bestemt for den angivne belastning P, der angriber i dækskivens plan.

Den minimale opdeling i skivefelter (A, B, C og D) er vist på figur 2.15 b, og svarer til de tre vægskiver og dækskiven.

En optælling giver N = 4 og
$R = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 12$. D.v.s., $3\,N = R$.

Alle skivefelter har hver mindst tre indbyrdes uafhængige snitkræfter.

I figur 2.15 d er opskrevet ligningssystemet, hvor snitkræfterne er ubekendte. Koefficientmatricens determinant ses at være forskellig fra nul, så de R snitkræfter er indbyrdes uafhængige.

Konstruktionen er da statisk bestemt.

De betragtede snitkræfter vil således kunne bestemmes udelukkende ved hjælp af de statiske ligevægtsligninger.

Snitkræfterne svarende til belastningen P bestemmes ved at starte med skivefelt A, der kun har tre ubekendte snitkræfter. Når disse er bestemt, vil de tre vægskivefelter kun have tre ubekendte snitkræfter tilbage, som så bestemmes.

Beregningsgangen er som følger, idet $\Sigma P_x = 0$ angiver kraftligevægt i x-retningen og $\Sigma M_z = 0$ momentligevægt om z-aksen.

<u>Skivefelt A:</u>

$$\Sigma P_y = 0 \Rightarrow Q_{AB} = P$$

$$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow Q_{AC} = -\frac{P\,a}{2\,b}$$

$$\Sigma P_x = 0 \Rightarrow Q_{AD} = -Q_{AC} = \frac{P\,a}{2\,b}$$

<u>Skivefelt B:</u>

$$\Sigma P_y = 0 \Rightarrow Q_B = Q_{AB} = \underline{\underline{P}}$$

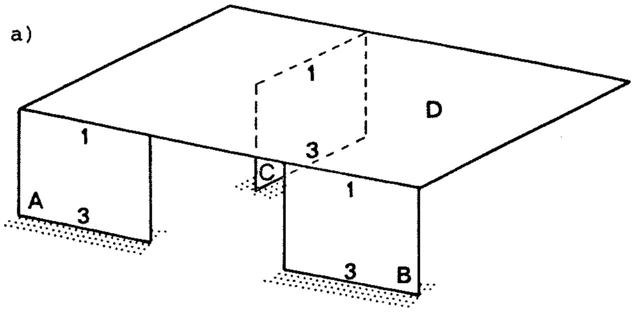
$$\Sigma P_z = 0 \Rightarrow N_B = \underline{\underline{0}}$$

$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow M_B = -Q_{AB}\,h = \underline{\underline{-P\,h}}$$

Det fremgår af eksempel 2.03, at det er muligt at opbygge en statisk bestemt skive-

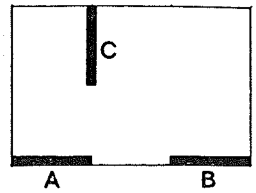
Figur 2.16.

a)



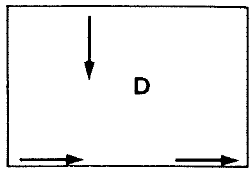
Plan

b)



Skivefelt D

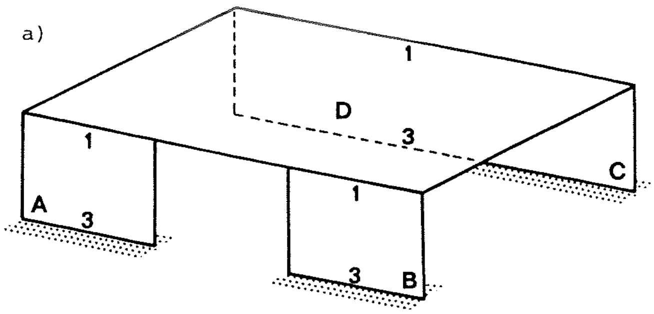
c)



R = 3 N , men statisk overbestemt

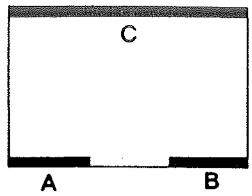
Figur 2.17.

a)



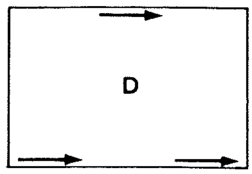
Plan

b)



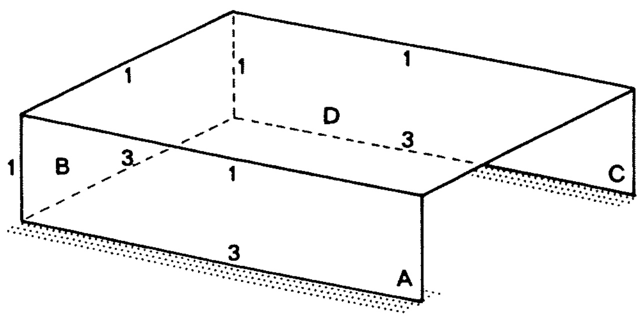
Skivefelt D

c)

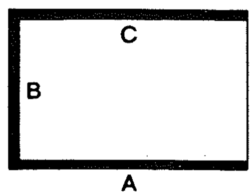


R = 3 N , men statisk overbestemt

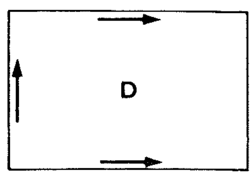
Figur 2.18.



Plan



Skivefelt D



N = 4   R = 14   d.v.s. R > 3 N

En skivekonstruktion bestående af en dækskive understøttet af tre vægskiver, hvorimellem der kan overføres forskydningskræfter, er statisk ubestemt.

konstruktion bestående af en dækskive understøttet af tre vægskiver. Som det vil fremgå af det næste eksempel, er der visse krav, som vægskivernes indbyrdes placering skal opfylde, for at skivekonstruktionen er statisk bestemt.

Eksempel 2.04.

Tre vægskiver gennem samme punkt

På figur 2.16 a er vist en skivekonstruktion, hvor tre vægskiver understøtter en dækskive. Vægskiverne er placeret således, at snitkræfter mellem dækskive og vægskiver går igennem samme punkt (figur 2.16 c).

Som i eksempel 2.03 er R = 3 N , og alle skivefelter har mindst tre snitkræfter, men da dækskivens tre snitkræfter går igennem samme punkt, er de ikke statisk uafhængige. Skivekonstruktionen er derfor ikke statisk bestemt, men statisk overbestemt.

Tre parallelle vægskiver

Et tilsvarende forhold gør sig gældende for skivekonstruktionen på figur 2.17 a. Her er dækskivens snitkræfter parallelle, og derfor heller ikke statisk uafhængige. Skivekonstruktionen er altså heller ikke statisk bestemt, men statisk overbestemt.

I lighed med skivekonstruktionerne i eksemplerne 2.01 og 2.02 kan de i dette eksempel behandlede skivekonstruktioner optage visse belastninger. Det drejer sig om kræfter, der virker i vægskivernes planer. Som tidligere omtalt kan der i en statisk overbestemt skivekonstruktion indgå dele, der i sig selv udgør en statisk bestemt konstruktion (se også figur 2.12).

Af ovenstående, som omhandler en-etages skivekonstruktioner, kan sluttes:

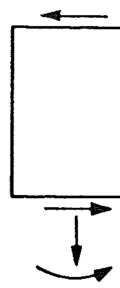
Sætning 2.15:

En en-etages skivekonstruktion, hvor der mellem hver vægskive og fundamentet er tre statisk uafhængige snitkræfter, er statisk bestemt eller ubestemt, hvis dækskiven er understøttet af tre vægskiver, der ikke alle er parallelle, og hvis planer ikke alle går igennem samme punkt.

Hvis R = 3 N , er konstruktionen statisk bestemt, medens den er statisk ubestemt for R > 3 N (se figur 2.18).

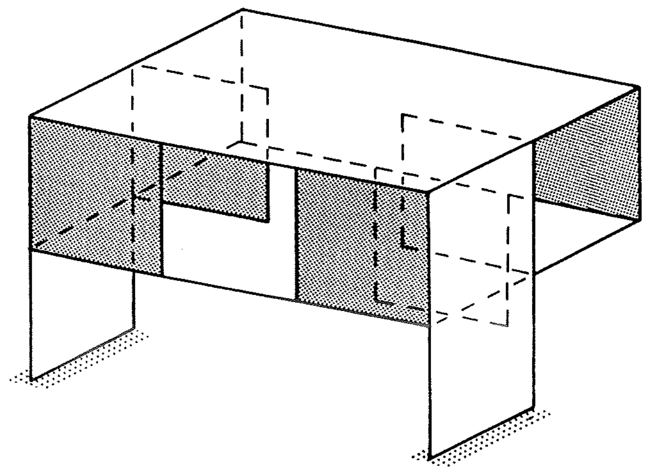
Figur 2.19

Eksempel på væg med
mindst 4 mulige snitkræfter



Figur 2.20

a.

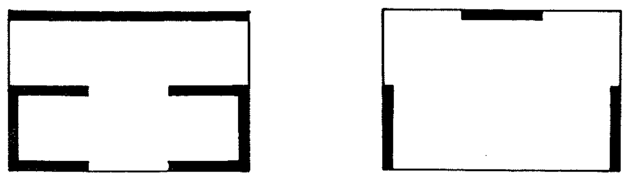


etage 2

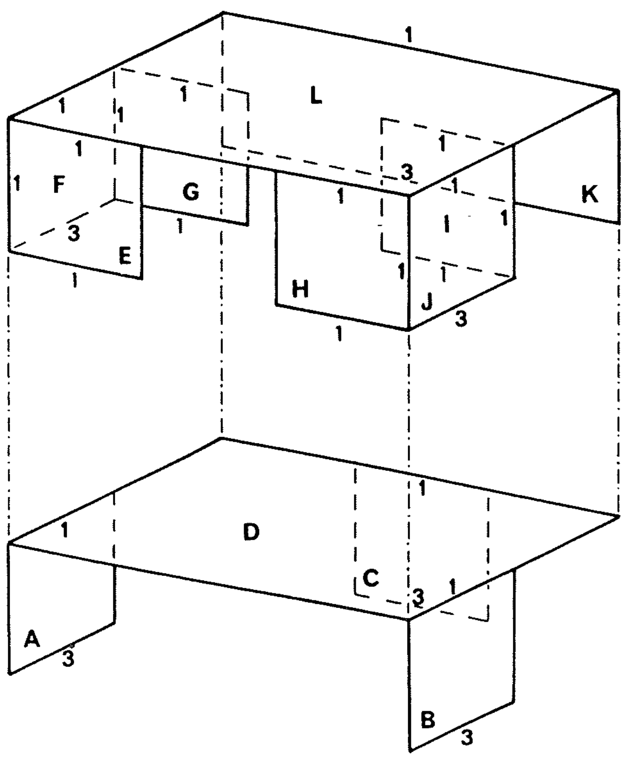
etage 1

Plan etage 2

Plan etage 1



b.
etage 2



opdeling i
to en-etages
skivekonstruk-
tioner

c.
etage 1

(44)

Dette fører umiddelbart til den generelle regel:

Sætning 2.16:

For at en skivekonstruktion, der udelukkende er opbygget af væg- og dækskiver, skal kunne optage en vilkårlig belastning, kræves det, at dækskiven (dækskiverne) i hver etage er understøttet af mindst tre vægskiver, der ikke alle er parallelle, og hvis planer ikke alle går igennem samme punkt. Desuden skal disse vægskiver hver have mindst 4 mulige snitkræfter og være istand til at føre belastningen en etage ned.

Sætningen uddybes med et eksempel senere (eksempel 2.09).

I almindelige præfabrikerede husbygningskonstruktioner, hvis vægskiver enten er parallelle med eller vinkelrette på bygningens længderetning, betyder det, at der pr. etage skal være mindst én længdeafstivende væg og mindst én tværafstivende væg, og desuden mindst én væg, hvis plan ikke går igennem disse to vægges skæringslinie.

Hjælp til optællingen af N og R

Medens det for en-etages skivekonstruktioner var relativt overskueligt at foretage optællingen af skivefelter og snitkræfter, kan det for fleretages skivebygninger ofte være vanskeligt uden videre at foretage denne optælling. Det kan derfor være nødvendigt at gå lidt mere systematisk til værks, hvilket der i det følgende skal vises et par eksempler på.

Eksempel 2.05:

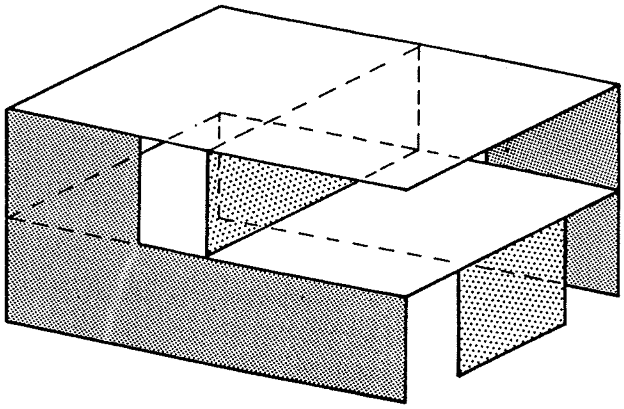
Opdeling i en-etages konstruktioner

Skivekonstruktionen på figur 2.20 a skal undersøges for statisk bestemthed. Konstruktionen deles i første omgang i to en-etages skivekonstruktioner, som vist på figur 2.20 b og c. Etage 2's understøtningssnitkræfter vil virke som belastning på etage 1. Hvis etage 2 er statisk bestemt, vil understøtningssnitkræfterne være statisk bestemte, og som ubekendte snitkræfter i etage 1, bliver der så kun de på figur 2.20 c angivne. Hvis etage 1 også er statisk bestemt, vil hele konstruktionen være statisk bestemt.

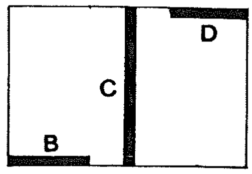
47

Figur 2.21.

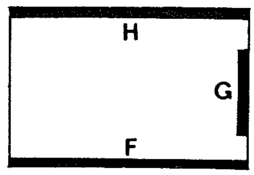
a.



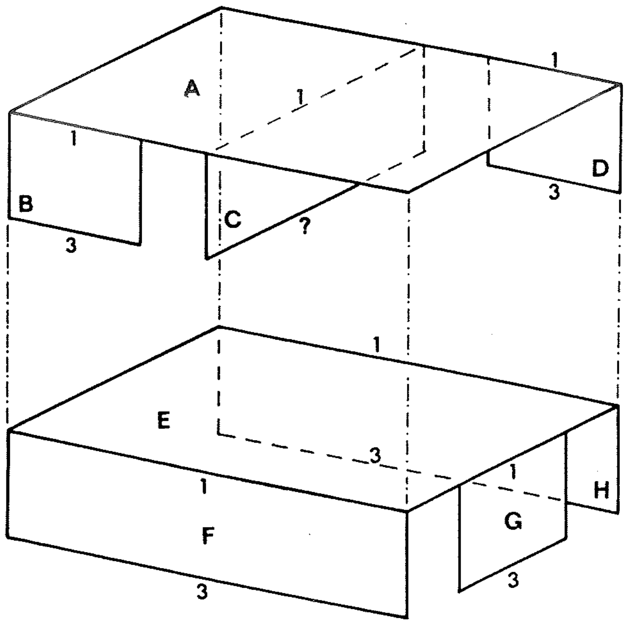
Plan etage 2



Plan etage 1

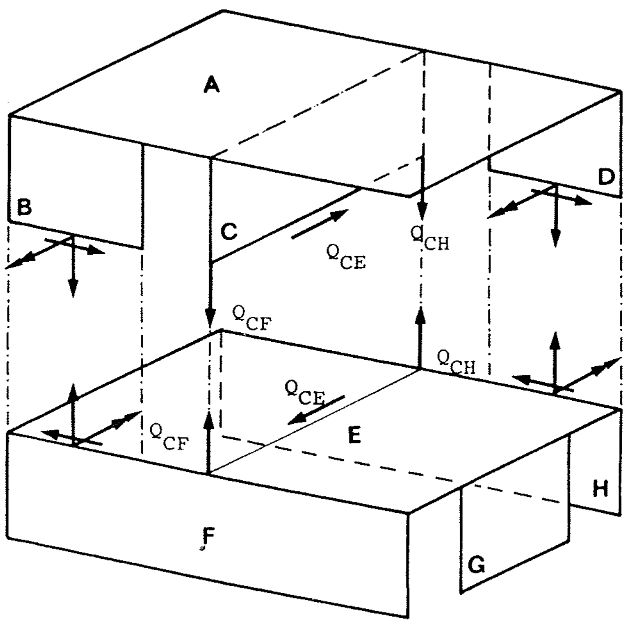


b.



Opdeling i
to en-etages
skivekonstruktioner

c.



Mulige snitkræfter
mellem de to
en-etages skive-
konstruktioner

Dette fører umiddelbart til følgende:

Sætning 2.17:

En fleretages skivekonstruktion er statisk bestemt med hensyn til skivekræfter, hvis den kan opdeles i en-etages skivekonstruktioner, der hver især er statisk bestemte.

De enkelte etagers statiske bestemthed undersøges.

Først fjernes skivefelterne E, G, H og I, der hver har tre statisk uafhængige snitkræfter. Dette ændrer i henhold til sætning 2.13 ikke den statiske bestemthed.

Den reducerede skivekonstruktion i etage 2 og skivekonstruktionen i etage 1 har begge dækskiven understøttet på tre vægskiver, der ikke er parallelle og ikke går gennem samme punkt. Under hver vægskive er der tre statisk uafhængige snitkræfter. For hver skivekonstruktion er $N = 4$ og $R = 12$, altså $R = 3N$. I henhold til sætning 2.15 vi da to én-etages konstruktioner, der er statisk bestemte.

I henhold til sætning 2.17 er to-etages konstruktionen uden væg E, G, H og I da statisk bestemt.

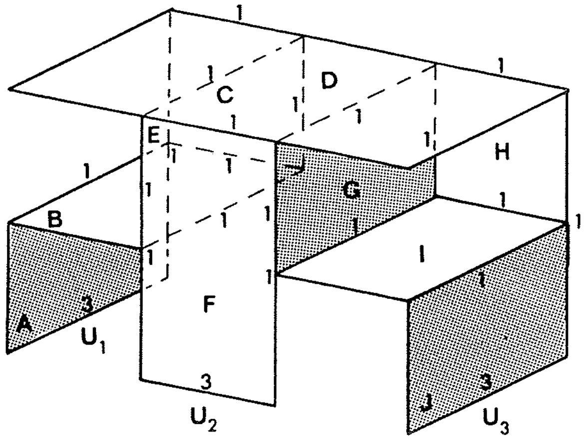
Med hjælp af den efter sætning 2.13 udledte fremgangsmåde i forbindelse med fastlæggelse af statisk bestemthed fås da, at den oprindelige skivekonstruktion er statisk bestemt.

Eksempel 2.06:

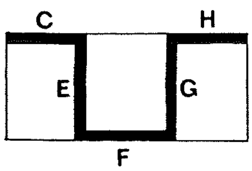
Et andet eksempel, hvor metoden med opdeling i to en-etages skivekonstruktioner anvendes, er vist på figur 2.21 a og b. Problemet er her, om der er 1 eller 3 snitkræfter langs skivefelt C's nederste rand. Det giver sig umiddelbart, at der i hvert fald er 1, nemlig forskydningskraften Q_{CE} mellem skivefelterne C og E. I henhold til figur 2.08 c og sætning 2.04 kan der imidlertid også overføres kræfter mellem skivefelterne C og henholdsvis F og H, hvorfor skivefelt C vil have 3 snitkræfter langs den nederste rand (se figur 2.21 c). Skivekonstruktionen på figur 2.21 a ses derefter at være statisk bestemt, da den kan opbygges af to statisk bestemte en-etages skivekonstruktioner.

Figur 2.22.

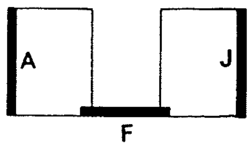
a.



Plan etage 2



Plan etage 1



b.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	U_1	U_2	U_3	Σ_1	Σ_2
A		1	1								3			5	5
B	1		1		1	1								4	3
C	1	1		1	1									4	2
D			1		1	1	1	1						5	4
E		1	1	1		1								4	1
F		1		1	1		1		1			3		8	5
G				1		1		1	1					4	2
H				1			1		1	1				4	2
I						1	1	1		1				4	1
J								1	1				3	5	3
U_1	3													3	28 = R
U_2						3								3	
U_3										3				3	
														56 = 2 R	

48

Denne koncentrerede kraftoverførsel kan umiddelbart synes kun at være teoretisk mulig, da skivefelterne kun er samlet i ét punkt. I den virkelige konstruktion vil samlingen imidlertid have en vis udstrækning, idet skiverne jo ikke er uendelig tynde, og skiverne desuden lokalt kan forstærkes i fornødent omfang, hvorfor muligheden ikke er så utopisk endda.

Eksempel 2.07:

Systematisk optælling

For den på figur 2.22 a viste skivekonstruktion skal der vises en anden fremgangsmåde, hvor skivefelterne undersøges efter tur. Der udarbejdes et skema, som vist på figur 2.22 b med lige så mange lodrette og vandrette rubrikker, som der er skivefelter + understøtningslinier. Skivefelterne er betegnet A, B, C ...., I, J og understøtningslinierne U_1, U_2 og U_3.

Ved udfyldningen af skemaet startes med skivefelt A i øverste vandrette kolonne, og det undersøges, hvor mange mulige snitkræfter, skivefeltet har fælles med skivefelterne B, C, D, o.s.v., og disse tal noteres efterhånden i skemaet under de respektive skivefelter. I dette tilfælde er der 1 fælles med B og 3 fælles med U_1.

På denne måde fortsættes med skivefelt B, C, D o.s.v., indtil der sluttes med U_3.

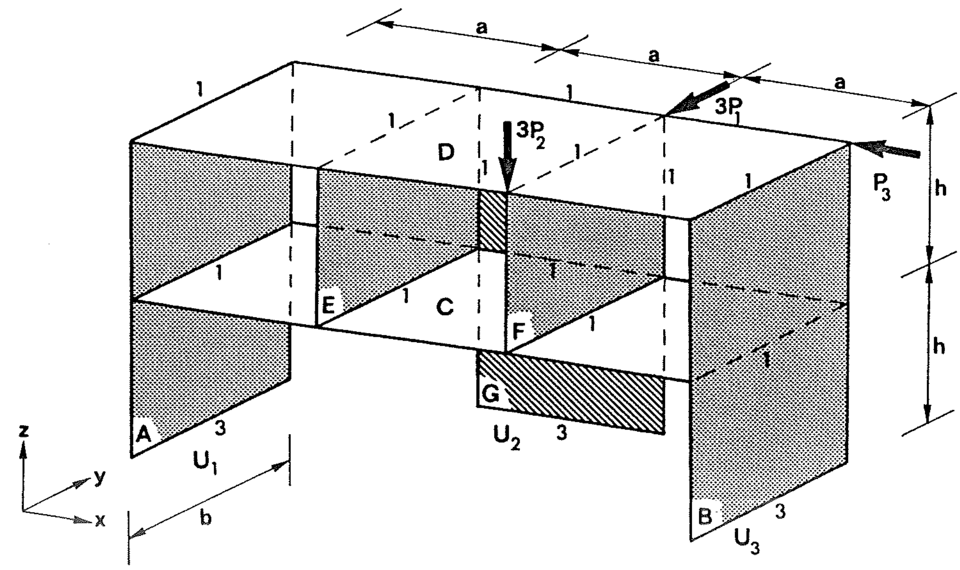
I dette eksempel optræder der også koncentrerede snitkræfter, som tilfældet var i forrige eksempel, nemlig mellem skivefelterne A-C, B-F, F-I og H-J.

Summeres der vandret over alle tallene (Σ_1 i skemaet) fås antallet af snitkræfter for de enkelte skivefelter. Summeres der vandret over tallene til højre for diagonalen (Σ_2 i skemaet), og lægges disse tal sammen, fås det samlede antal ubekendte snitkræfter i skivekonstruktionen (R).

Det kan så nemt undersøges, om alle skivefelter har mindst tre snitkræfter, idet tallene i rubrikken Σ_1 skal være større end eller lig 3. Da R er beregnet i skemaet, kan det nemt undersøges om $3\,N = R$.

Figur 2.23.

a.

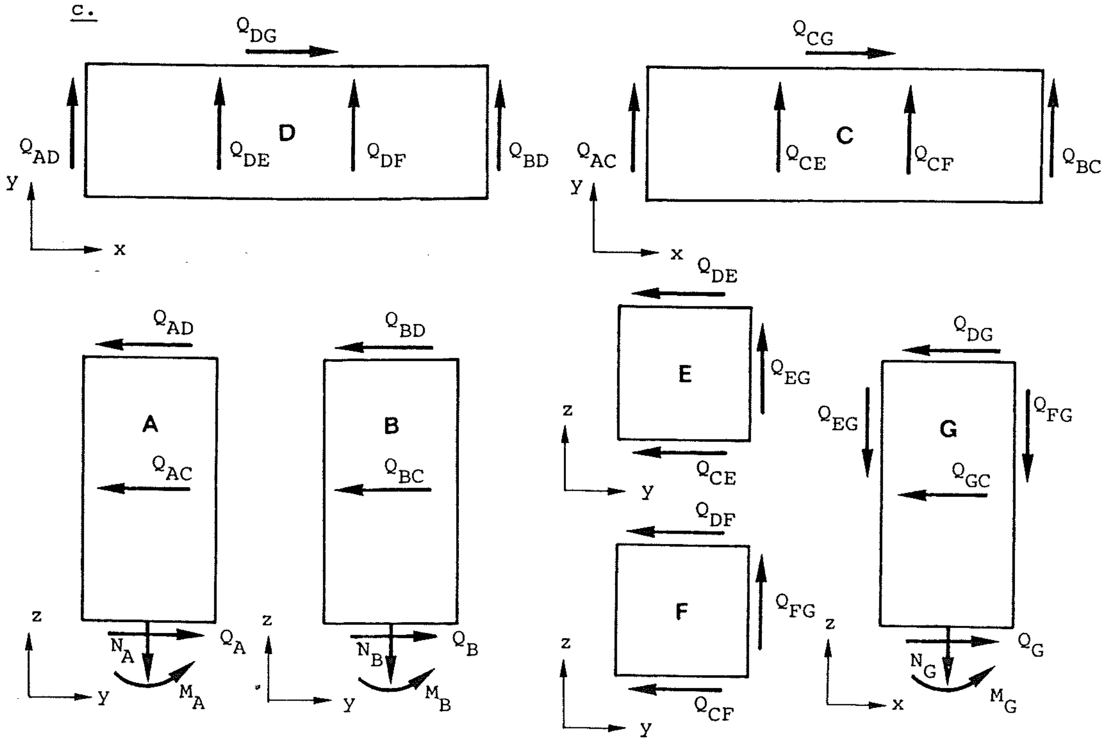


b.

	A	B	C	D	E	F	G	U_1	U_2	U_3	Σ_1	Σ_2
A			1	1				3			5	5
B			1	1						3	5	5
C	1	1			1	1	1				5	3
D	1	1			1	1	1				5	3
E			1	1			1				3	1
F			1	1			1				3	1
G			1	1	1	1			3		7	3
U_1	3										3	21 = R
U_2							3				3	
U_3		3									3	
											42 = 2 R	

N = 7 ⇒ R = 3 N

c.



Endelig kan optællingen kontrolleres ved, at skemaet skal være udfyldt symmetrisk om diagonalen.

Endvidere skal summen af tallene i Σ_1-rubrikken være lig det dobbelte af summen af Σ_2-rubrikken på grund af symmetrien.

I dette tilfælde er ingen tal i Σ_1 mindre ned 3. R = 28 og N = 10; d.v.s. $3\,N > R$. Skivekonstruktionen er statisk overbestemt.

Beregning af snitkræfter

Når snitkræfterne i en skivekonstruktion skal beregnes, undersøges først, om konstruktionen er statisk bestemt ved hjælp af fremgangsmåden forrest i dette kapitel 2.4 eller ved hjælp af sætningerne i kapitlet. I bekræftende fald vides det, at snitkræfterne kan findes af ligevægtsligningerne.

Alternativt kan det undersøges 1)om alle skivefelter har mindst 3 statiske uafhængige snitkræfter og 2)om antallet af snitkræfter ialt (R) er 3 gange antallet af skivefelter (N). Er dette tilfældet, og kan der af ligevægtsligningerne med en vilkårlig ydre last findes en løsning forskellig fra nulløsningen, da er konstruktionen statisk bestemt, og ligevægtsligningerne giver snitkræfterne for en given last.

Eksempel 2.08:

I dette eksempel behandles beregningen af snitkræfterne i en to-etages skivekonstruktion. Skivekonstruktionen er vist på figur 2.23 a, og optællingen i skemaet på figur 2.23 b viser, at $3\,N = R$ og at alle skivefelter har mindst 3 snitkræfter. Da snitkræfterne er statisk uafhængige (ikke vist her), er skivekonstruktionen statisk bestemt.

I stedet for at undersøge om alle snitkræfterne er statisk uafhængige (ved at beregne koefficientmatricens determinant), kan man "prøve sig frem", som beskrevet ovenfor, om snitkræfterne kan beregnes for en vilkårlig last.

Ved den anvendte opdeling ønskes snitkræfterne mellem skivefelterne beregnet for de tre belastninger $3\,P_1$, $3\,P_2$ og P_3.

Til brug for beregningen kan skivefelterne tegnes som vist på figur 2.23 c, hvor der for de enkelte skivefelter er vist snitkræfterne. Snitkræfterne er angivet med to bogstaver som index, hvor de to bogstaver repræsenterer de to skivefelter, som snitkraften er fælles for. Reaktionssnitkræfterne har dog kun et bogstav som index.

Snitkræfterne bestemmes successivt ved at starte med et skivefelt, der kun har tre ubekendte. Rækkefølgen er på figur 2.24 a, b og c, angivet ved indcirklede tal. De indrammede værdier for snitkræfterne angiver de snitkræfter, hvis værdi kendes på det tidspunkt det pågældende skivefelts snitkræfter skal beregnes.

Eksempel 2.09:

I dette eksempel undersøges skivekonstruktionen fra eksempel 2.08 nærmere. Skivekonstruktionen er vist på figur 2.23 a.

Fjernelse af skivefelter

Skivefelterne E og F har hver tre statisk uafhængige snitkræfter og kan - jævnfør sætning 2.13 - fjernes, uden at den statiske bestemthed ændres i den resterende del af konstruktionen.

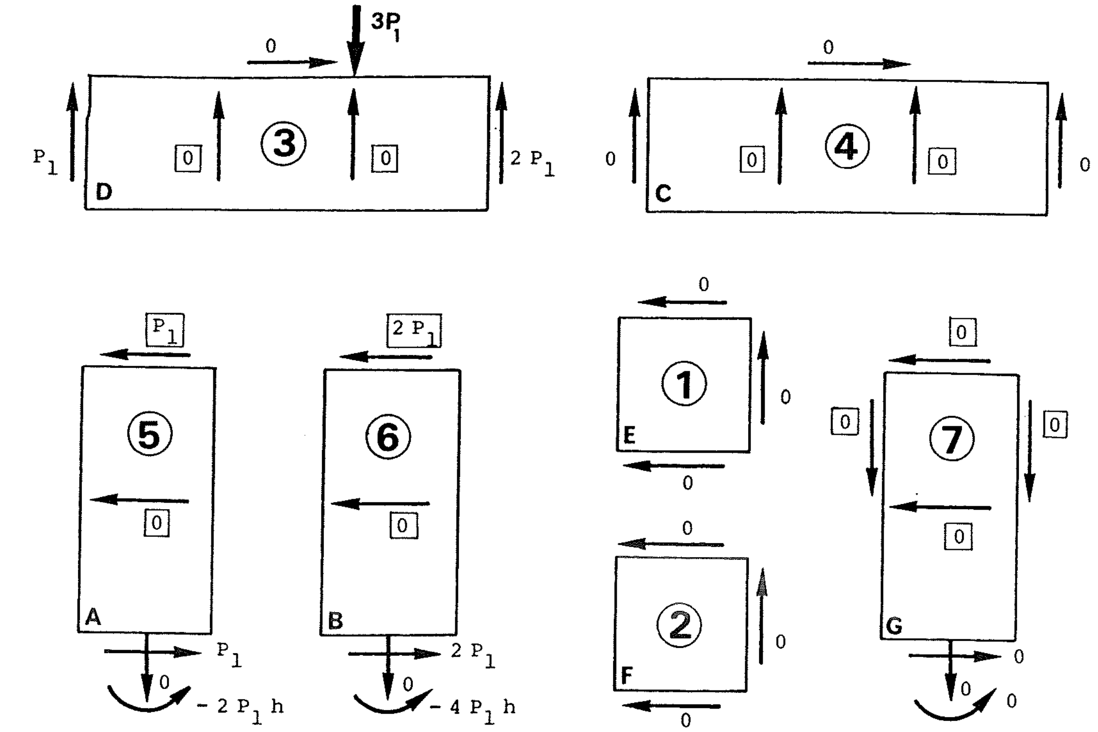
Men hvis de deltager i optagelsen af en bestemt belastning, kan de selvfølgelig ikke fjernes, uden det får betydning for konstruktionens muligheder for at optage den pågældende belastning.

Et skivefelt som E og F med kun tre ubekendte snitkræfter deltager kun i kraftoptagelsen, når belastningen angriber selve skivefeltet.

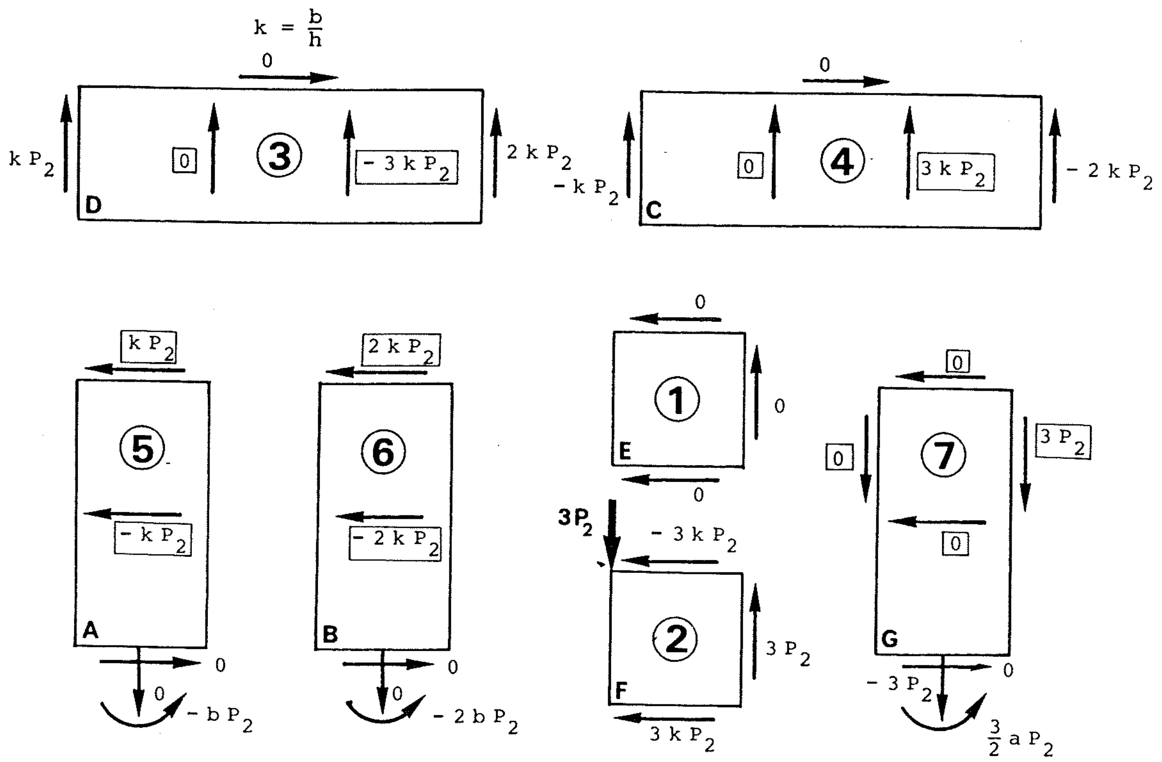
Konstruktionen kan ikke optage belastningen $3P_2$ i eksempel 2.08 hvis skivefelt F fjernes; bemærk, at der er fundet snitkræfter forskellige fra nul i eksemplet.

I de tilfælde, hvor snitkræfterne til skivefelt E og F findes lig nul, kan skivefeltet fjernes.

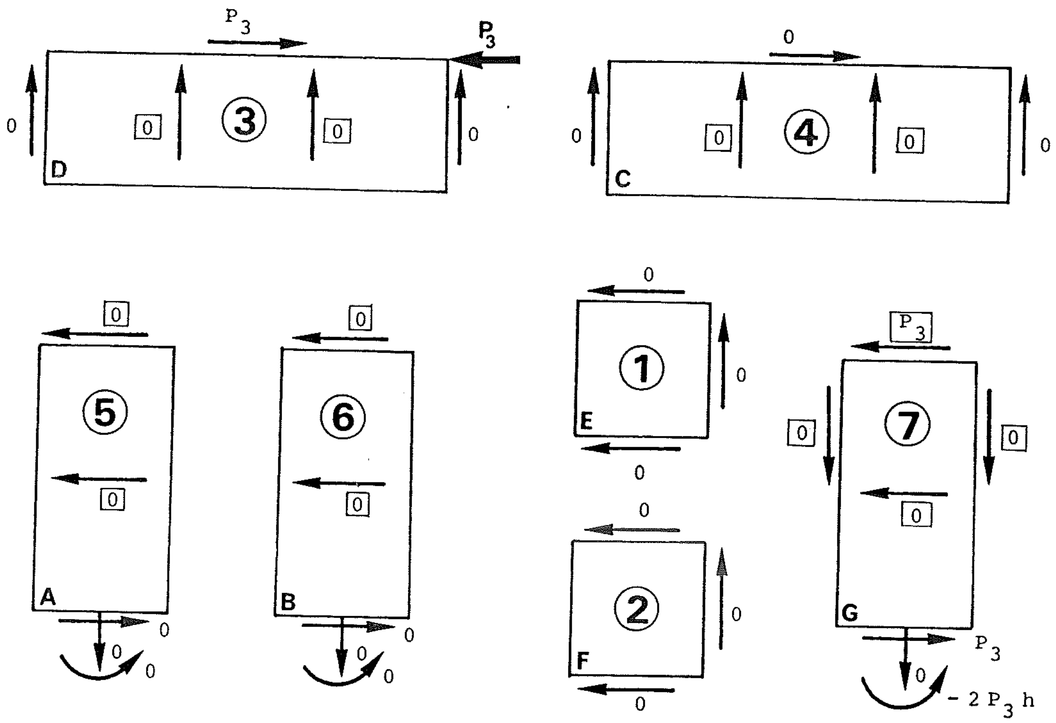
Figur 2.24 a.



Figur 2.24 b.

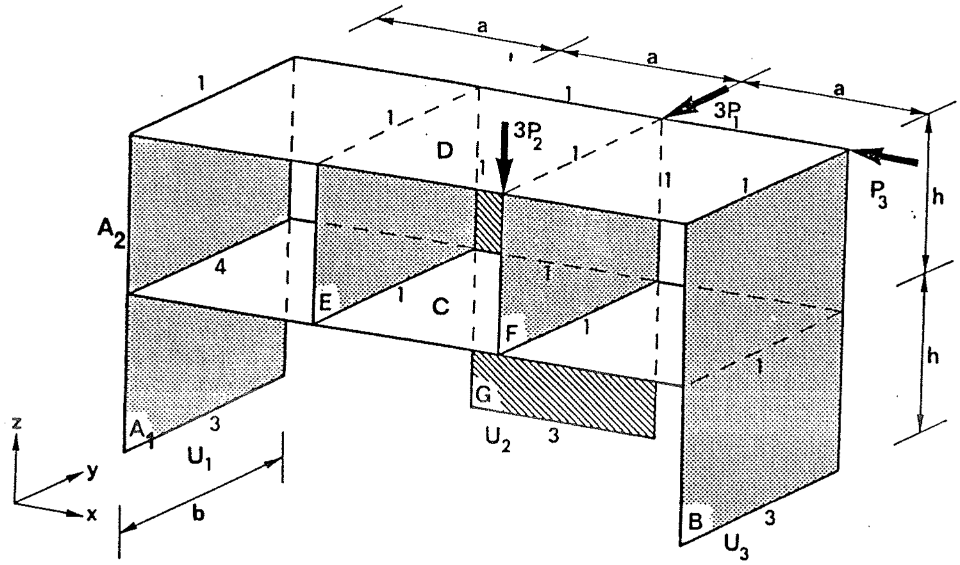


Figur 2.24 c.

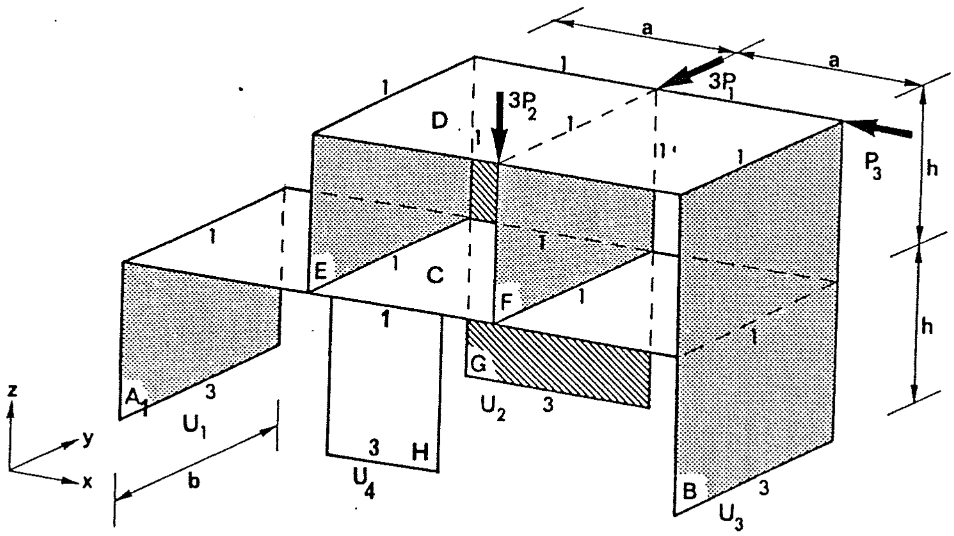


Figur 2.25.

a.


a
a
a
1
1
1
1
3P1
3P2
D
P3
h
h
A2
4
E
1
C
F
1
1
G
A1
3
U1
U2
3
z
y
x
b
B
3
U3

b.


a
a
1
1
3P1
3P2
D
1
P3
h
h
1
E
1
C
F
1
1
G
A1
3
U1
U2
3
1
3
H
U4
z
y
x
b
B
3
U3

(55)

Vægskivers understøtningssnitkræfter

Væg A deles i to skivefelter A_1 og A_2. Se figur 2.25 a.

I samlingen mellem A_1 og A_2 samt dækskiven er der fire mulige snitkræfter; snittet imellem A_1 og A_2 tænkes lagt over dækskiven, så der er tre snitkræfter imellem A_1 og A_2 og én snitkraft mellem A_2 og dækskiven.

Herudover er de mulige snitkræfter i samlingerne i konstruktionen som i eksempel 2.08.

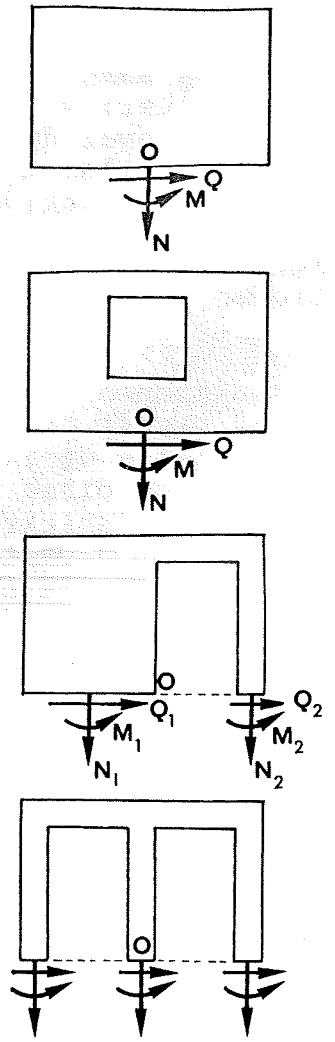
Det ses, at skivekonstruktionen har dækskiverne understøttet af mindst tre vægskiver, der ikke er parallelle og ikke går gennem samme punkt, og at disse vægskiver har mindst fire mulige snitkræfter; dette gælder både med væg A delt i de to skivefelter A_1 og A_2 og med væg A som ét skivefelt.

Skivekonstruktionen kan da ifølge sætning 2.16 optage en vilkårlig belastning.

Fjernes nu vægskive A_2 og tilføjes en vægskive H, fås skivekonstruktionen på figur 2.25 b (når den udragende del af øverste dækskive fjernes).

Her er den øverste dækskive kun understøttet af to vægge, der har mindst fire mulige snitkræfter, og skivekonstruktionen kan da ikke optage en vilkårlig belastning, jævnfør sætning 2.16.

Figur 2.26.



Specielle skivefelter

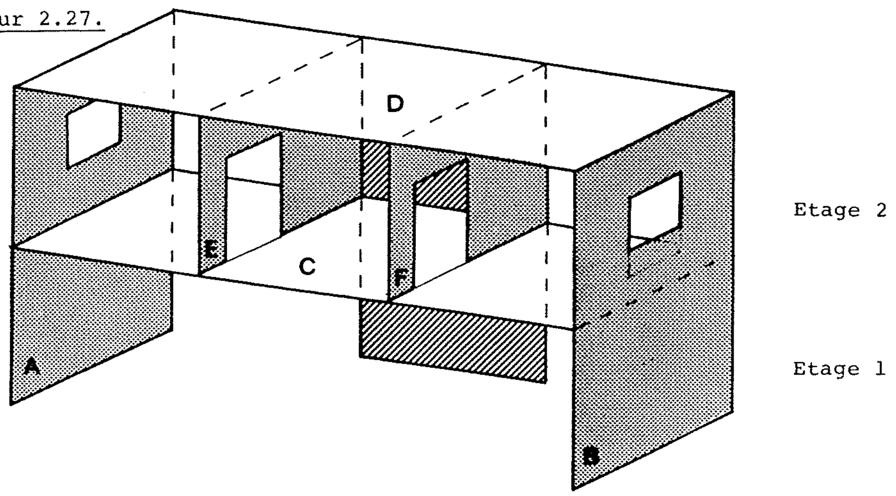
Et rektangulært skivefelt tænkes at indgå i en statisk bestemt skivekonstruktion. Specielt langs den nederste rand antages snitkræfterne i O at være N, Q og M.

Erstattes skivefeltet af et andet med en vinduesåbning i, vil snitkræfterne langs den nederste rand stadig have værdien N, Q og M.

Anvendes i stedet et skivefelt med døråbning, vil resultanten i punkt O af de to sæt snitkræfter N_1, Q_1, M_1 og N_2, Q_2, M_2 stadig være lig N, Q og M. Fordelingen af N, Q og M på de to sæt snitkræfter kan imidlertid ikke bestemmes alene ud fra de statiske ligevægtsligninger.

Analoge forhold gælder for skivefeltet med flere døråbninger.

Figur 2.27.



Skivebygningen på figuren er dannet af bygningen på figur 2.23 ved at erstatte de rektangulære skivefelter i etage 2 med skivefelter med dør- eller vinduesåbninger. Snitkræfterne i samlingerne vil være de samme som i figur 2.23 , hvis skivebygningen udsættes for samme belastning. Ved snitkræfter i samlingerne skal i samling C-E og C-F dog forstås resultanten af de to sæt snitkræfter på hver side af døråbningerne.

2.5 Specielle skivefelter

Skivekonstruktioner, der udelukkende er opbygget af rektangulære skivefelter, og som er statisk bestemte, forekommer kun sjældent i virkeligheden. Det er mere almindeligt, enten at nogle af skivefelterne er forsynet med åbninger, eller at der også indgår søjler og bjælker i konstruktionen, eller at der indgår så mange skivefelter, at skivekonstruktionen bliver statisk ubestemt.

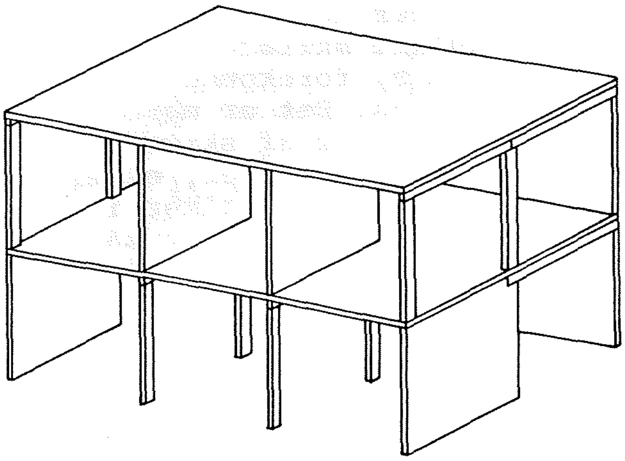
Statisk bestemte skivekonstruktioner opbygget af skiver, bjælker og søjler behandles i næste kapitel, medens statisk ubestemte konstruktioner behandles i notatets sidste afsnit.

Her skal kort ses på alternativer til det rektangulære skivefelt i en statisk bestemt skivekonstruktion. På figur 2.26 er vist tre specielle skivefelter. Kravene til de specielle skivefelter er, at de skal kunne klare samme statiske funktion, som det oprindelige skivefelt. Giver de specielle skivefelter anledning til flere sæt snitkræfter end det oprindelige, vil de enkelte sæts værdier ikke kunne bestemmes alene ved brug af de statiske ligevægtsligninger. Her er det også nødvendigt at kende materialeegenskaberne, da disse skivefelters snitkræfter er statisk ubestemte. Summen af snitkraftssættene er det eneste, der kan bestemmes, idet den er lig med snitkraftssættet på randen til det rektangulære skivefelt.

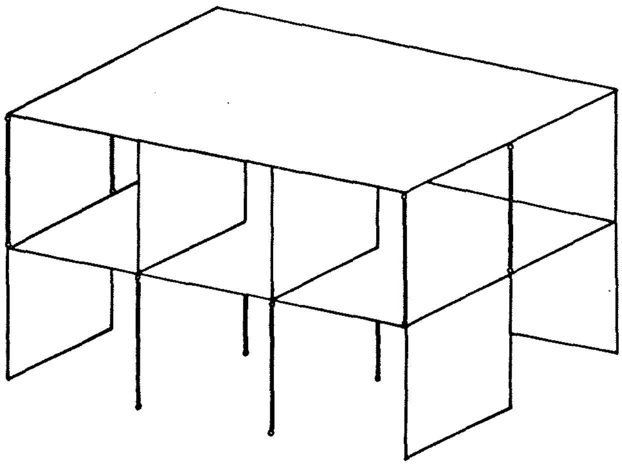
På figur 2.27 er vist, hvordan en del af skivefelterne i skivekonstruktionen på figur 2.23 kan erstattes af skivefelter med dør- og vinduesåbninger. I denne nye konstruktion vil snitkræfterne også være statisk bestemte, idet det dog langs samlingerne C-E henholdsvis C-F kun vil være de to sæt snitkræfters resultant, der er statisk bestemt.

Figur 2.28.

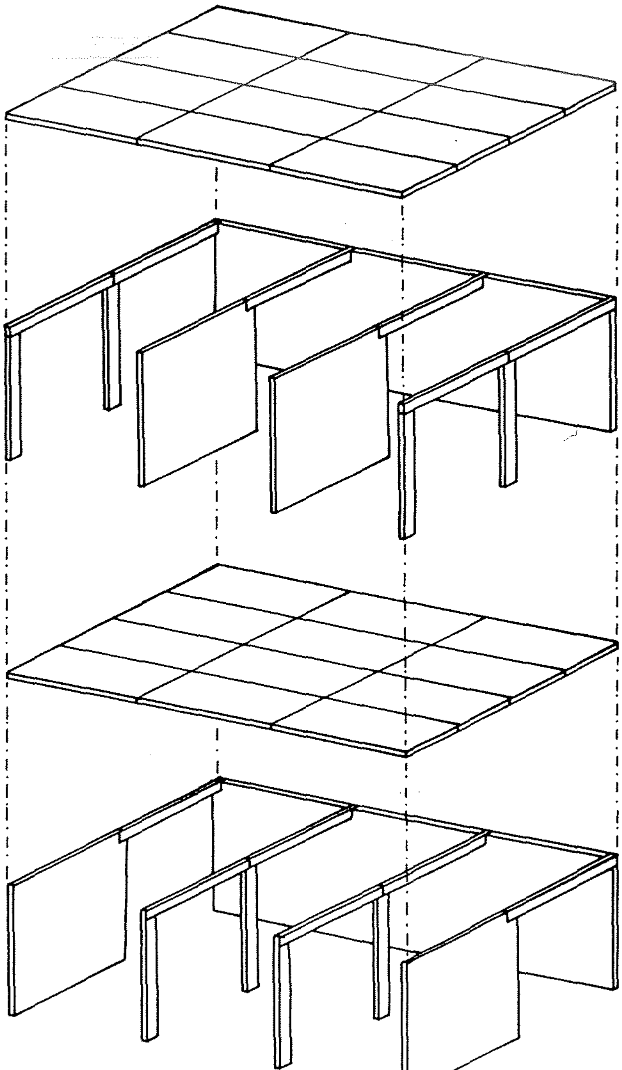
a. Skive-bjælke-søjlebygning



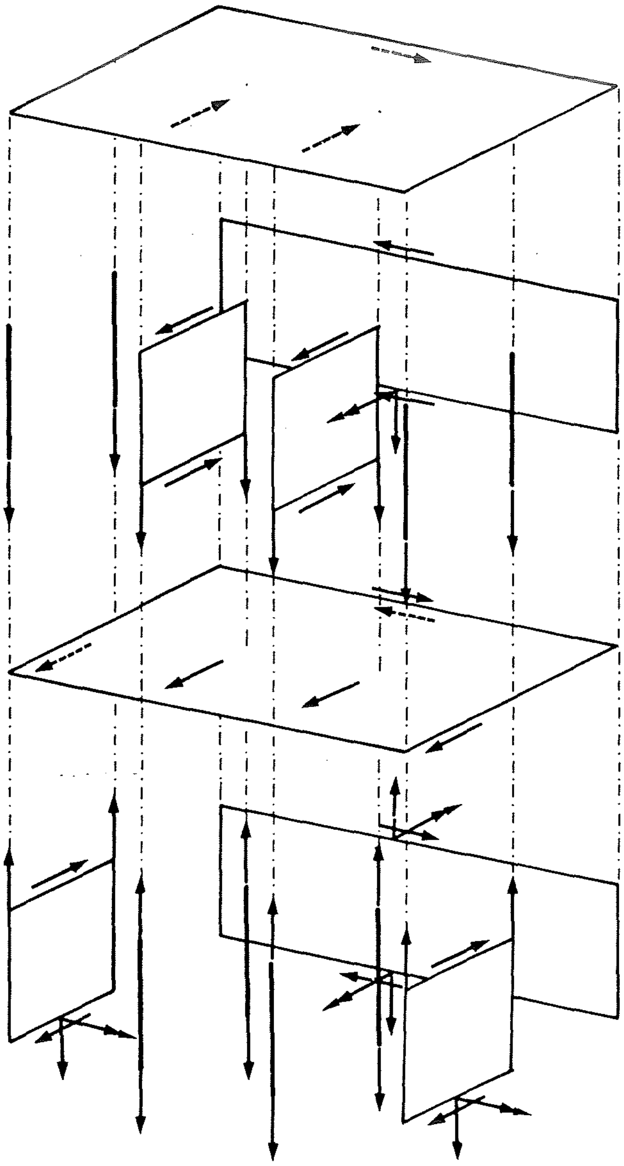
d. Beregningsmodel



c. Mulig opbygning



e. Mulige snitkræfter



60

(59)

2.6 Statisk bestemte skivekonstruktioner, opbygget af skivefelter, bjælker og søjler.

I dette kapitel betragtes skivebygninger, hvor der foruden skiver også indgår bjælker og søjler. Et eksempel på en sådan bygning er vist på figur 2.28. Bjælkernes primære formål er at virke som understøtninger for dækskiverne, d.v.s. at optage dækskivernes pladekræfter, som så enten overføres til søjlerne som normalkræfter eller til vægskiverne som skivekræfter. Hvis samlingerne mellem søjler og bjælker er udført således, at der kan overføres momenter mellem disse, vil bjælkerne desuden kunne indgå i det afstivende system, idet de sammen med søjlerne danner rammer (jfr. specielle skivefelter i forrige kapitel). I disse tilfælde vil bjælkekræfterne normalt ikke være statisk bestemte.

I behandlingen af de statisk bestemte skivekonstruktioner er det derfor muligt i beregningsmodellen at se bort fra bjælkerne ved beregning af skive- og søjlekræfterne, når konstruktionen er belastet i en skiveplan.

Beregningsmodellen

Beregningsmodellen, der vil blive anvendt i det følgende, vil derfor være den i kapitel 1.4 omtalte suppleret med pendulsøjler mellem etagerne.

En pendulsøjle er en søjle, der er simpelt understøttet i begge ender, og som derfor kun kan overføre normalkræfter.

For den på figur 2.28 a viste skivekonstruktion vil beregningsmodellen derfor få de på figur 2.28 d viste udseende, med de på figur 2.28 e viste mulige snitkræfter.

Fastlæggelsen af, om en skivekonstruktion med søjler er statisk bestemt, kan ske på tilsvarende måde som i tilfældet med skivekonstruktioner uden søjler (sætning 2.08 i kapitel 2.3).

De mulige snitkræfter mellem søjler og skivefelter fremgår af figur 2.29. Der gælder

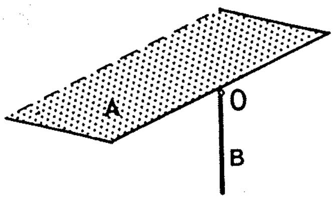
Sætning 2.18:

Mulige snitkræfter mellem søjler og skivefelter

Mellem et skivefelt og en søjle kan der i samlingen overføres én normalkraft i søjleretningen, hvis søjlen er beliggende i skivefeltets plan, ellers ingen.

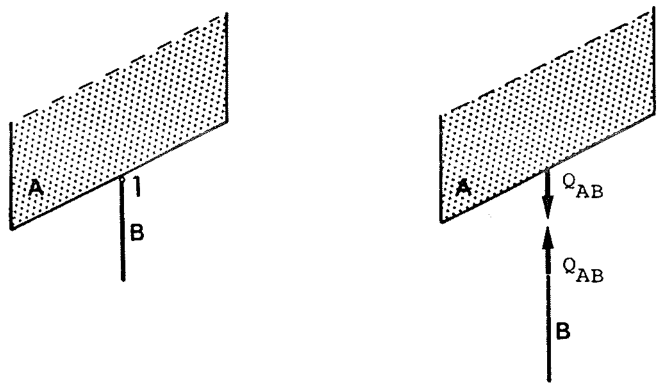
Figur 2.29. Mulige snitkræfter mellem skivefelter og søjler.

a. Søjle og skivefelt ligger ikke i samme plan

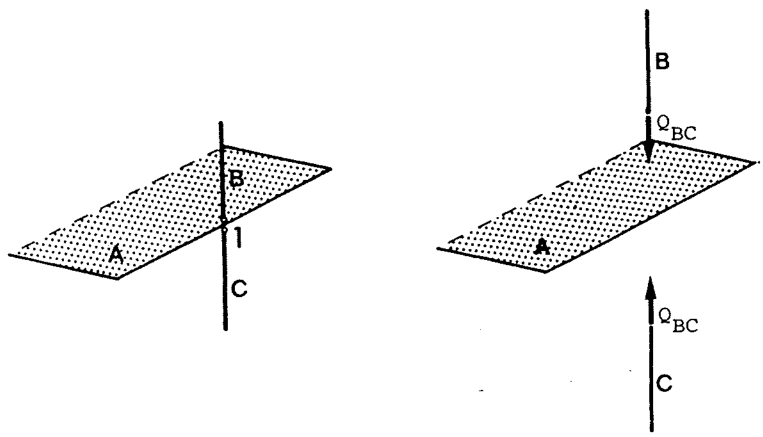


ingen snitkræfter

b. Skivefelt og søjle i samme plan



c. Mulige snitkræfter mellem to søjler



Idet der for pendulsøjler kun er én ligevægtsligning, nemlig kraftligevægt i søjlens længderetning, kan fastlæggelsen af statisk bestemthed ske analogt som i sætning 2.08. D.v.s.

Sætning 2.19:

Fastlæggelse af statisk bestemthed

Definition af M

Er en skivekonstruktion opdelt i N skivefelter, hvor hvert felt har mindst tre ubekendte og statisk uafhængige snitkræfter, og M søjler, hvor hver søjle har mindst én ubekendt snitkraft, og er der ialt R ubekendte og statisk uafhængige snitkræfter i samlingerne, da er skivekonstruktionen statisk bestemt med hensyn til disse snitkræfter, hvis $R = 3N + M$.

Det betyder, at en ydre belastning, der angriber en sådan skivekonstruktion i en af skivefelternes planer eller i en søjles længderetning, eller som kan opløses i kræfter, der angriber i skiveplanerne eller i søjlernes længderetning, vil kunne optages af konstruktionen udelukkende ved skive- og søjlekræfter, når $R \geq 3N + M$.
For $R = 3N + M$ vil snitkræfterne være statisk bestemte.

Eksempel 2.10:

Med den på figur 2.28 e anvendte opdeling fås:

$N = 8 \qquad M = 8 \qquad \text{og} \qquad R = 32,$

d.v.s., $R = 3N + M$.

Da de øvrige krav i sætning 2.19 er opfyldt, er konstruktionen statisk bestemt.

Analogt til sætning 2.13, der gælder for skivefelter, gælder der for søjler:

Sætning 2.20:

Tilføjelse eller fjernelse af pendulsøjler

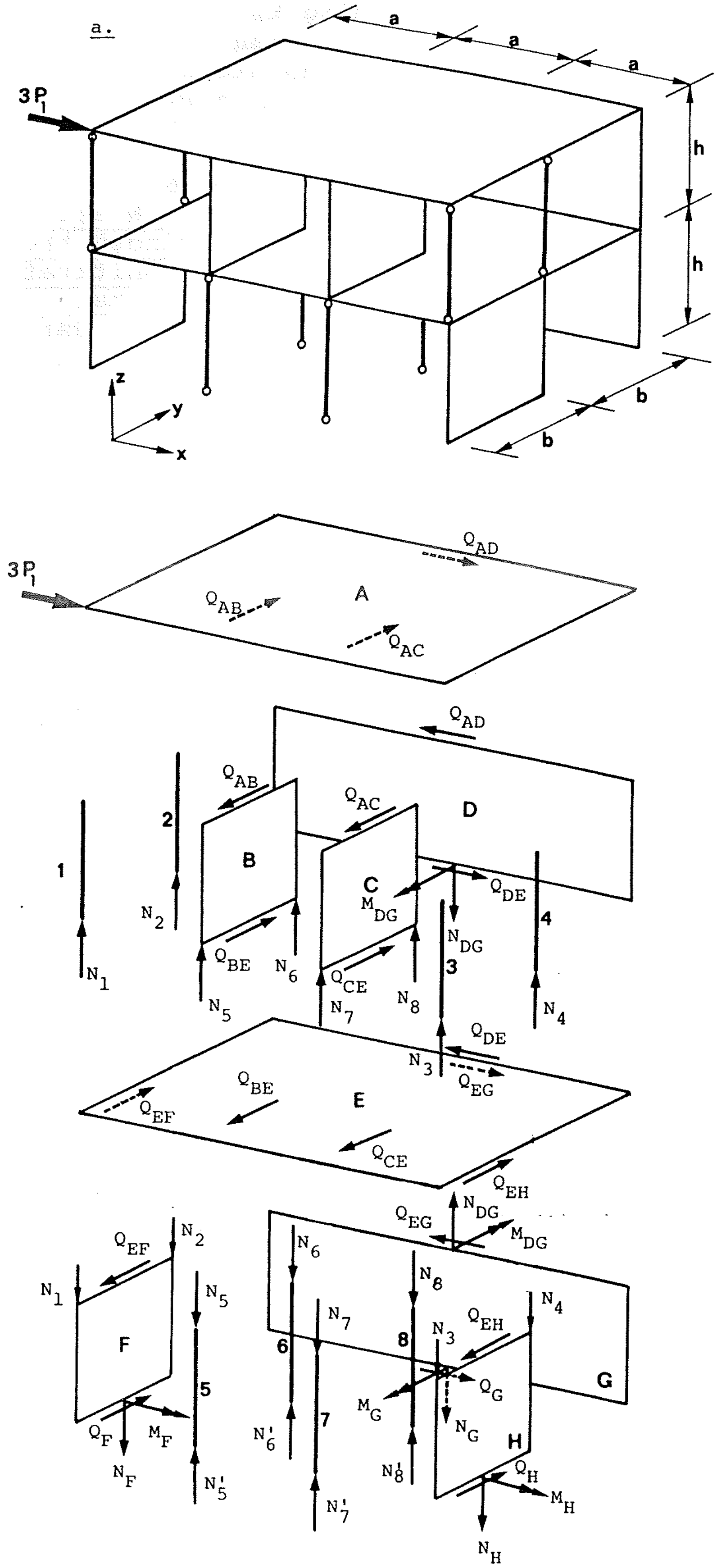
En pendulsøjle med én ubekendt snitkraft kan altid tilføjes eller fjernes i en statisk bestemt skivekonstruktion, uden at dette ændrer den statiske bestemthed i den resterende del af konstruktionen.

Pendulsøjle med én ubekendt snitkraft

Ved en pendulsøjle med én ubekendt snitkraft forstås en søjle af den type, der forekommer i øverste etage i figur 2.28. I disse er snitkraften foroven kendt,

Figur 2.30.

a.



b. Beregning.

$\alpha = \frac{h}{a} \qquad \beta = \frac{b}{a}$

A. $Q_{AD} = -3P_1$

$Q_{AC} = -Q_{AB}$

$Q_{AB} = 6\frac{b}{a}P_1 = 6\beta P_1$

B. $Q_{BE} = Q_{AB} = 6\beta P_1$

$N_5 = -N_6$

$N_6 = -\frac{h}{b}Q_{AB} = -6\alpha P_1$

C. $Q_{CE} = -6\beta P_1$

$N_7 = -N_8$

$N_8 = 6\alpha P_1$

D. $Q_{DE} = -3P_1$

$N_{DG} = 0$

$M_{DG} = 3P_1 h$

E. $Q_{EG} = Q_{DE} = -3P_1$

$Q_{EF} = -Q_{EH}$

$Q_{EH} = -2\beta P_1$

Søjle 1, 2, 3 og 4

$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 0$

F. $Q_F = 2\beta P_1$

$N_F = 0$

$M_F = -2h\beta P_1$

G. $Q_G = -3P_1$

$N_G = 0$

$M_G = M_{DG} - hQ_{EG}$

$= 6P_1 h$

H. $Q_H = -2\beta P_1$

$N_H = 0$

$M_H = 2\beta h P_1$

Søjle 5, 6, 7 og 8

$N_5' = N_5 \; , \; N_6' = N_6$

$N_7' = N_7 \; , \; N_8' = N_8$

Kontrol: $N_F + N_G + N_H + N_5' + N_6' + N_7' + N_8' = 0$

$Q_F + Q_H = 0$

$M_F + M_H + b(N_6' + N_8') + 2bN_G = 0$

medens snitkraften forneden er ubekendt (jfr. sætning 2.18).

Derimod har søjlerne i nederste etage to ubekendte snitkræfter, nemlig dels snitkraften mellem søjle og fundament, dels snitkraften mellem søjle og skivefeltet i øverste etage.

I figur 2.28 d kan søjlerne i øverste etage derfor fjernes, uden at den statiske bestemthed ændres i den resterende del af konstruktionen.

Sætning 2.20 fører til følgende regel for søjlekræfterne:

Sætning 2.21:

Pendulsøjlers deltagelse i belastningsoptagelsen

En pendulsøjle i en skivekonstruktion deltager kun i optagelsen af belastninger i skiveplanerne, hvis den eller søjler i samme lodrette linie understøtter en skive, eller hvis belastningen virker i søjlens længdeakse.

For figur 2.28 betyder det, at søjlerne i øverste etage kun vil deltage i optagelsen af en lodret belastning i øverste etage, medens søjlerne i nederste etage også vil deltage i optagelsen af en vandret belastning.

Eksempel 2.11:

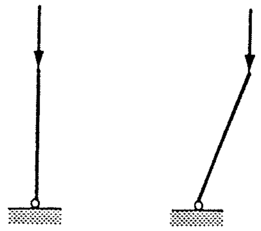
På figur 2.30 a er vist en opdeling i skivefelter af figur 2.28, og de viste snitkræfter ønskes beregnet for belastningen $3\,P_1$.

Skivekonstruktionen er tidligere i eksempel 2.10 vist at være statisk bestemt og beregningsgangen fremgår af figur 2.30 b, idet der sker en successiv beregning, startende med skivefelt A, der kun har tre ubekendte.

Som det fremgår optages belastningen, dels af længdevæggen (D), dels af tværvæggene, som fordeler excentrisitetsmomentet ned gennem bygningen. Søjlerne i nederste etage belastes, idet de medvirker i ligevægtsbetingelserne for de to tværvægge i øverste etage.

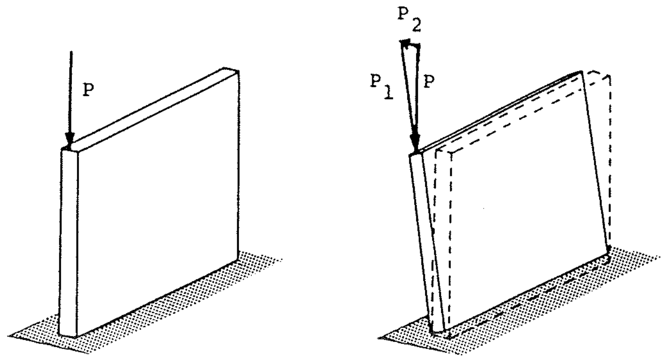
Figur 2.31.

a.



Ustabil søjle

b.



Ustabil skive

Ustabil skive:

Skiven er indspændt langs den nederste kant og ellers fri.

Angribes den af en kraft P langs den øverste rand, vil en forskydning af den øverste rand ud af skiveplanet bevirke, at kraften P ikke længere udelukkende kan optages ved skivekræfter.

Kraften P kan opdeles i to komposanter P_1 og P_2, hvoraf P_1 lokalt optræder i skiveplanet, medens P_2 virker vinkelret derpå.

Hvis skiven antages helt bøjningsslap, vil P_2 ikke kunne overføres af skiven, og udbøjningen vil øges indtil brud indtræder. I virkeligheden er de skiver, der indgår i en husbygningskonstruktion, i besiddelse af en vis bøjningsstivhed og vil kunne overføre moderate værdier for P_2, men der er så ikke længere tale om kraftoptagelse udelukkende ved skivevirkning.

2.7 Stabilitetskrav

Den hidtidige behandling i kapitlerne 2.1 - 2.6 af skivekonstruktioner er udelukkende baseret på de statiske ligevægtsbetingelser. Som bekendt kan en ligevægtstilstand være enten stabil eller ustabil. Forskydes skivekonstruktionen ud af sin ligevægtstilstand, vil den, hvis den er i stabil ligevægt, vende tilbage til sin ligevægtstilstand, hvorimod dette ikke vil være tilfældet, hvis ligevægtstilstanden er ustabil.

Eksempel 2.12:

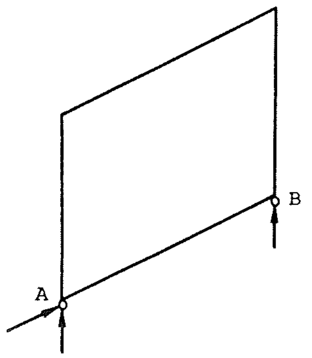
I henhold til sætning 2.08 og 2.19 udgør en fritstående pendulsøjle eller skive (se figur 2.31) en statisk bestemt konstruktion, idet de i deres udgangstilstand vil være i stand til at holde ligevægt med en belastning, der er beliggende i deres længdeakse henholdsvis plan. Hvis belastningens retning er konstant også under en mindre forskydning af konstruktionen vinkelret på kraftretningen, vil ligevægtstilstanden være ustabil, som det fremgår af figur 2.31.

Da en skivekonstruktion, dels deformeres af sin skivebelastning, dels kan deformeres af pladebelastning, og da ligevægtsligningerne opstilles for den udeformerede konstruktion, bliver det nødvendigt at kræve, at skivekræfterne i skivekonstruktionen er i stabil ligevægt. Stabilitetskravet er nøje forbundet til skivekonstruktionens geometri, og der skal derfor ses på hvilke krav,der må stilles til geometrien, for at konstruktionen kan være stabil.

I behandlingen af skivefelternes ligevægtsbetingelser er der hidtil kun set på skivekræfterne, d.v.s., de kræfter der virker i skivens plan. Til det brug er kun anvendt tre ligevægtsligninger, der sikrer ligevægten vinkelret på skiveplanen, automatisk har været opfyldt. Dette er imidlertid kun tilfældet, så længe skivefeltet bevarer sin udeformerede geometri. Som det fremgår af figur 2.31 b , er det nødvendigt, at skivefeltet er understøttet langs den øverste rand, således at kraftkomposanten vinkelret på skiveplan kan optages af under-

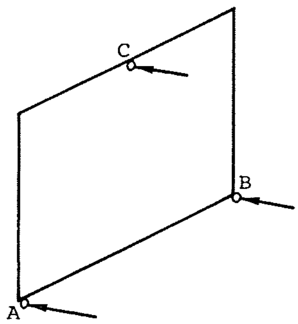
Figur 2.32.

a.



Skivefelt understøttet
mod bevægelser i sit plan

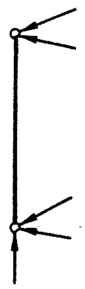
b.



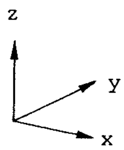
Skivefelt understøttet
mod bevægelser ud af
sit plan

De tre liniestykker AB, BC og AC er i [1] betegnet faste støttelinier, af hvilke der kræves tre, for at skivefeltet skal være stabilt. De to definitioner ses at være identiske.

c.



Stabil pendulsøjle



støtningen, hvis skivefeltet skal være stabilt.

Det stabile skivefelt kan derfor defineres som:

Definition af stabilt skivefelt

Sætning 2.22:

Et skivefelt, der er understøttet mod bevægelser i sit plan, og i tre punkter er understøttet mod bevægelser ud af sit plan, vil, hvis de tre punkter ikke ligger på en ret linie, være rumligt stabilt.

Understøtning mod bevægelse i skiveplanen kan være: 1 punkt med understøtning mod bevægelse i to retninger og 1 punkt med understøtning mod bevægelse vinkelret på linien gennem de 2 punkter.

De krævede understøtninger vil netop være tilstrækkelige til at sikre, at skivefeltets reaktioner vil kunne optage enhver ydre belastning (se figur 2.32 a og b). Pladebelastninger antages at blive fordelt til de tre understøtningspunkter ved pladepåvirkning.

Analogt til definitionen af det stabile skivefelt fås definitionen:

Stabil pendulsøjle

Sætning 2.23:

En pendulsøjle er rumlig stabil, hvis den dels er understøttet mod bevægelser i sin længderetning, dels i to punkter er understøttet mod bevægelser vinkelret på søjleaksen (se figur 2.32 c).

Af disse to definitioner fås så

Stabil skivekonstruktion

Sætning 2.24:

En stabil skivekonstruktion er en konstruktion, opbygget af stabile skivefelter og stabile søjler.

Der findes forskellige fremgangsmåder til at analysere, om en given skivekonstruktion er stabil.

I [1] omtales en fremgangsmåde, hvor skivekonstruktionens opbygning følges. Kan konstruktionen opbygges ved successiv sammensætning af en række stabilitetsenheder, er skivekonstruktionen stabil. Ved stabilitetsenheder forstås enkle, stabile skivekonstruktioner, f.eks. dækskiven understøttet af tre vægskiver (jfr. figur 2.15).

(69)

I [3] er omtalt en fremgangsmåde, hvor skivekonstruktionens enkelte skivefelter gennemgås systematisk, idet det undersøges, om hvert skivefelt har det tilstrækkelige antal understøtningspunkter. Fremgangsmåden er ret omstændelig, og baserer sig på anvendelse af EDB. Da princippet i metoden ligger tæt op ad den grafiske metode, der omtales i det næste kapitel, vil en nærmere omtale af metoden i [3] ikke finde sted her. Skal der alligevel opstilles et EDB-program til beregning af en skivekonstruktion, vil det dog være naturligt at indbygge denne metode til undersøgelse af stabiliteten.

Inden der tages fat på den grafiske metode, skal der lige nævnes, at det gælder:

Sætning 2.25:

Stabile skivekonstruktioners statiske bestemthed

En stabil skivekonstruktion er enten statisk bestemt eller statisk ubestemt.

og

Sætning 2.26:

Statisk bestemte konstruktioners stabilitet

I en statisk bestemt skivekonstruktion er alle skivefelter understøttet mod bevægelser i deres planer, og alle pendulsøjler understøttet mod bevægelser i søjlernes længderetning.

Sætningerne følger begge af, at kravet om de to understøtningspunkter mod bevægelser i skiveplanet er identiske med kravet om, at skivefeltet skal have mindst tre uafhængige snitkræfter.

Vides det om en skivekonstruktion, at den er statisk bestemt (f.eks. ved hjælp af sætning 2.08 eller 2.19) ,, er det altså tilstrækkeligt at undersøge, om alle skivefelter har de tre understøtningspunkter mod bevægelser ud af skiveplanent, for at sikre at konstruktionen også er stabil.

Endvidere gælder

Sætning 2.27:

En stabil skivekonstruktion vil kunne optage vilkårligt rettede kræfter.

Denne sætning følger af sætningerne 2.24, 23 og 22, idet de stabile søjlers og stabile skivefelters understøtninger netop vil være tilstrækkelige til at sikre,at søjlens og skivefeltets reaktioner vil kunne optage enhver ydre belastning (pladebelastninger på skivefelter antages at blive fordelt til de tre understøtningspunkter ved pladevirkning).

2.8 Grafisk stabilitetsundersøgelse

Denne grafiske metode for undersøgelse af en skivebygnings stabilitet baserer sig på,

at kravet om understøtningspunkter mod bevægelser i planet er identisk med et krav om, at der i skivefeltet skal være mindst tre linier, der dels ikke alle er parallelle, dels ikke alle skærer hinanden i samme punkt, i hvis retning skivefeltet er forhindret i at bevæge sig, og på

at kravet om mindst tre understøtningspunkter mod bevægelser ud af skiveplanet er identisk med et krav om, at der på tværs af skivefeltet skal være mindst tre linier - igennem punkter der ikke ligger på linie - i hvis retning skivefeltet er forhindret i at bevæge sig.

Støttelinier

Disse linier betegnes støttelinier.

Med brug af støttelinier kan stabilitetskravene til en skivebygning udtrykkes således:

Sætning 2.28:

En skivekonstruktion er stabil, hvis ethvert skivefelt i konstruktionen har mindst tre støttelinier i skiveplanet, der dels ikke alle er parallelle, dels ikke alle skærer hinanden i samme punkt, og hvis ethvert skivefelt har mindst tre støttelinier på tværs af skiveplanet i punkter, der ikke ligger på linie.

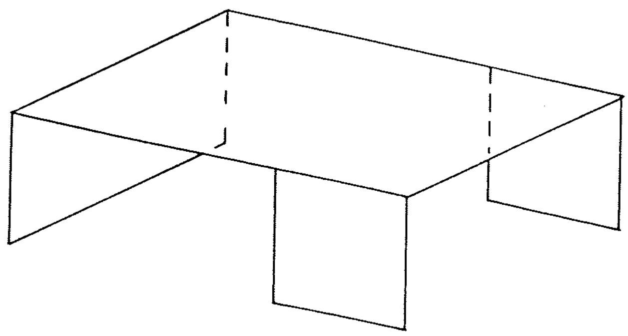
Har et skivefelt tre støttelinier i skiveplanet, er skivefeltet hindret i at bevæge sig i planet, og enhver linie i skivefeltet vil da være støttelinie.

Ved to skivefelter beliggende i samme plan, kan støttelinier i skiveplanet forlænges fra det ene skivefelt til støttelinier i skiveplanet for det andet skivefelt.

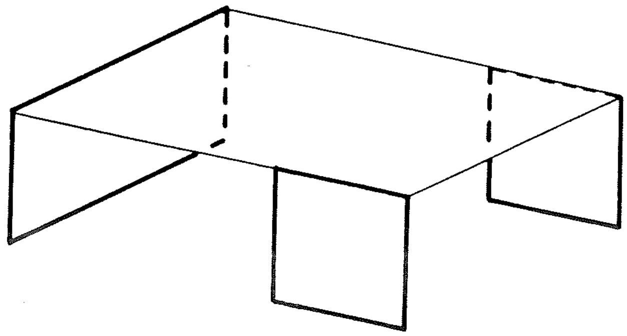
Ved to skivefelter, der ikke er beliggende i samme plan, kan støttelinier i skiveplanet for det ene skivefelt være støttelinier på tværs af planet for det andet skivefelt, hvis støttelinien står vinkelret på de to planers skæringslinie.

Figur 2.33.

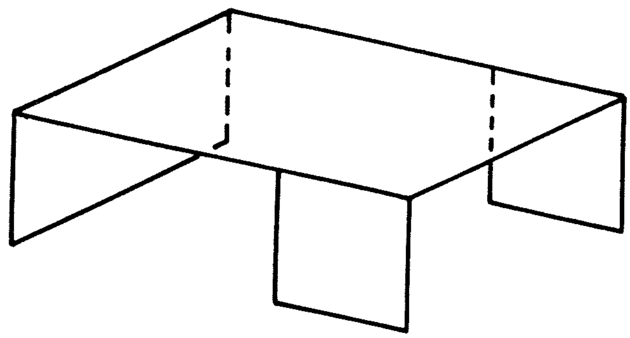
a.



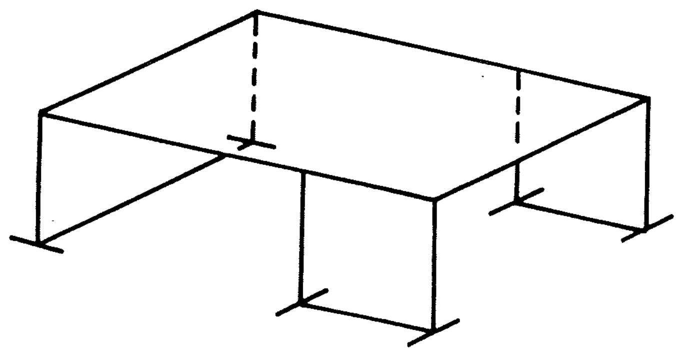
b.



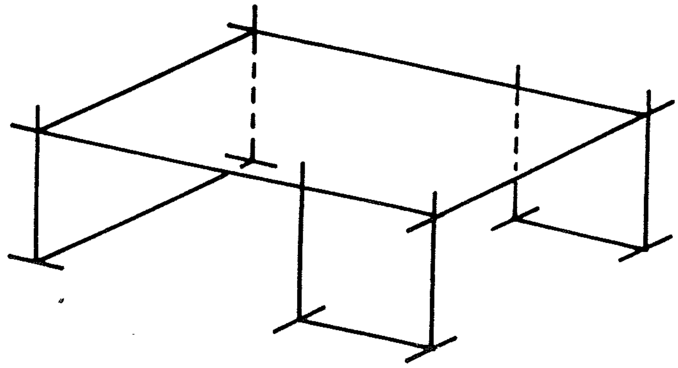
c.



d.



e.



Fremgangsmåden ved grafisk stabilitetsundersøgelse er:

1) En rumlig afbildning af skivekonstruktionen tegnes med tynd streg (figur 2.33 a).

Stabilitet i skiveplanen

2) For de skivefelter, der er understøttet på fundamentet, optegnes med kraftig streg eventuelle støttelinier. Hvis der ikke kan ske en forskydning mellem fundament og skive, vil understøtningsranden udgøre en støttelinie. Da en bevægelse i skiveplanet vinkelret på understøtningsranden normalt også er hindret, kan der tegnes to andre støttelinier, f.eks. langs skivefeltets lodrette rande. Har skivefeltet tre støttelinier kan der også tegnes en fjerde langs den sidste rand (jfr. figur 2.33 b).

3) Det undersøges så, om de allerede tegnede støttelinier også er støttelinier i planen for andre skivefelter. Er dette tilfældet for et skivefelt, og har det tre støttelinier, der ikke er parallelle, og som ikke skærer hinanden i samme punkt, optegnes også dette skivefelts rande med en kraftig streg (jfr. figur 2.33 c).

4) Fremgangsmåden i 3) fortsættes om muligt, indtil alle skivefelters rande er optegnet med kraftig streg. Lykkes det at få optegnet alle randene med kraftig streg - eller i hvert fald 3 støttelinier pr. skivefelt, vil alle skivefelter have den nødvendige understøtning mod bevægelser i deres planer.

Stabilitet ud af skiveplanen

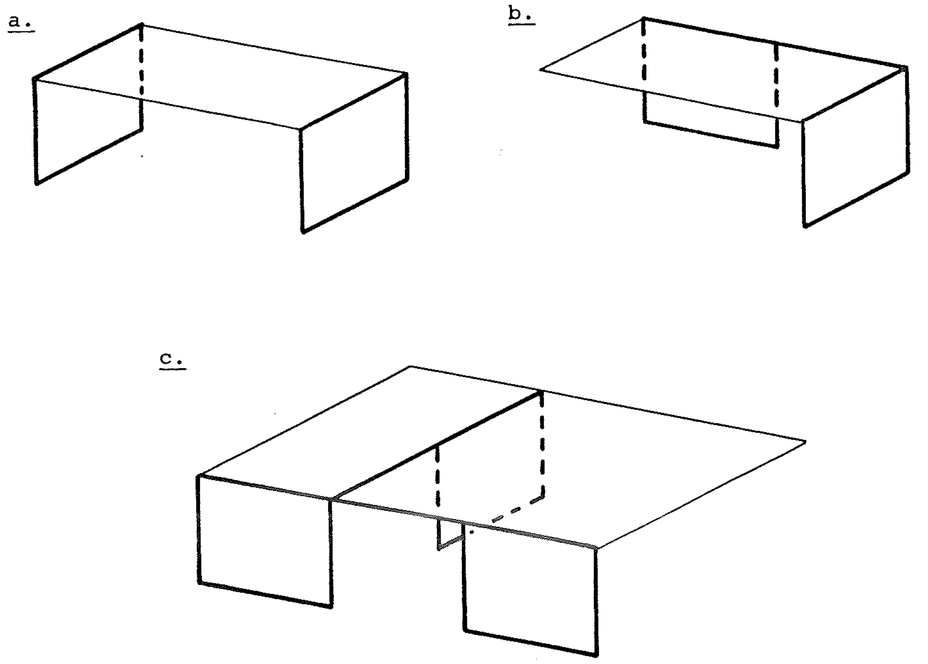
5) Herefter skal det nu undersøges, om alle skivefelter også har de fornødne tre understøtningspunkter mod bevægelser vinkelret på skiveplanet.

6) Her startes igen ved fundamentsrandene, idet det forudsættes, at skivefeltet langs denne er fastholdt mod bevægelser ud af sit plan. I to punkter langs understøtningsranden tegnes derfor med kraftig streg en kort støttelinie på tværs af skivefeltet (jfr. figur 2.33 d).

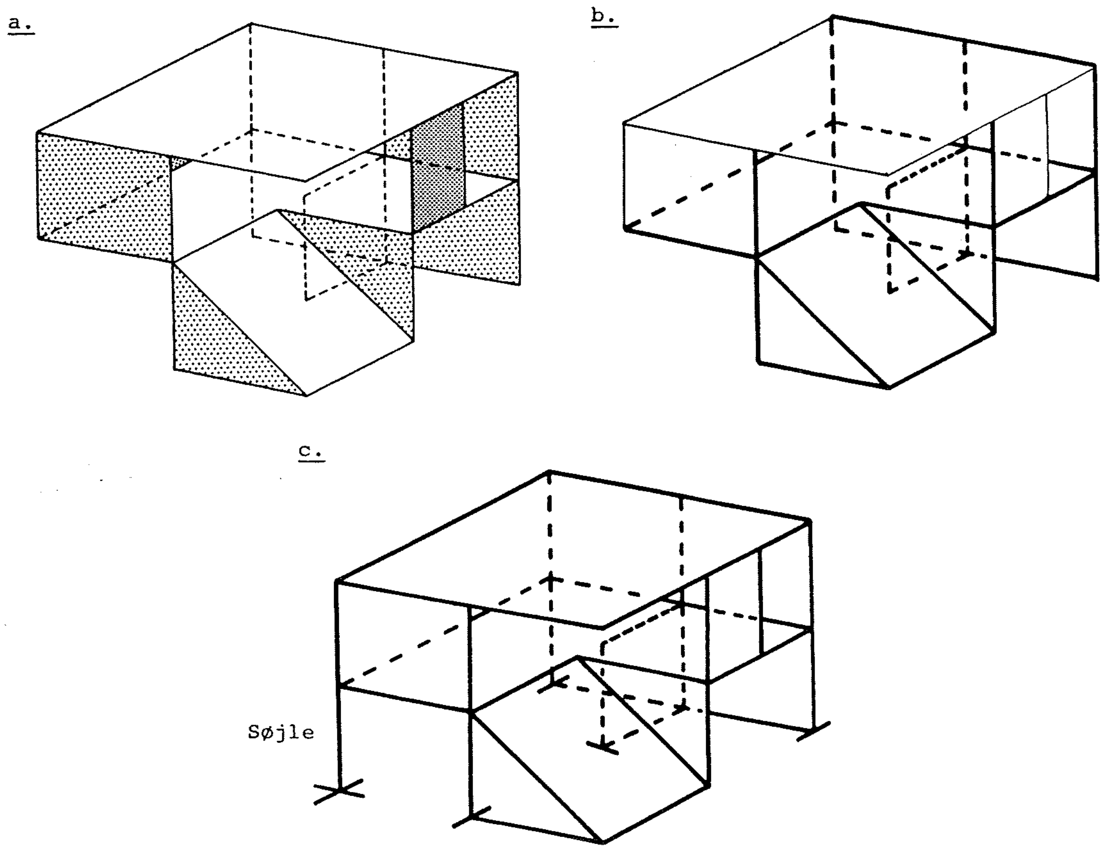
7) Derpå fortsættes med resten af samlingerne, idet alle støttelinier i skivefelterne forlænges et kort stykke ud over samlingerne (jfr. figur 2.33 e).

Figur 2.34.

Grafisk stabilitetsundersøgelse



Figur 2.35.



8) Endelig optælles så for hvert enkelt skivefelt, om der er mindst tre af de korte støttelinier på tværs af skiveplanet i punkter, der ikke ligger på linie. Er dette tilfældet, vil alle skivefelterne have den nødvendige understøtning med bevægelse ud af skiveplanet.

Med punkterne 4) og 8) opfyldt, vil skivekonstruktionen være stabil i henhold til sætning 2.28.

Eksempel 2.13:

På figur 2.34 a, b og c er vist tre stabilitetsundersøgelser, af tre tidligere behandlede statisk overbestemte skivekonstruktioner. Det fremgår, at den manglende stabilitet (og dermed statiske overbestemthed) hurtigt afsløres, idet dækskiverne kun har to støttelinier.

Eksempel 2.14:

Stabiliteten af skivebygningen på figur 2.35 a skal undersøges.

En grafisk stabilitetsundersøgelse er vist på figur 2.35 b hvor det afsløres, at den udkragede del af øverste etage ikke er stabil.

Anbringes der en søjle under det udkragede hjørne, viser stabilitetsundersøgelsen på figur 2.35 c at der nu er opnået en stabil skivekonstruktion.

Den grafiske metode viser sig således også at være et nyttigt værktøj, når en ustabil konstruktion skal gøres stabil.

(75)

2.9 Stabile skivekonstruktioner med statisk bestemte snitkræfter

For en stabil skivekonstruktion, opbygget af skivefelter og søjler, følger det af sætning 2.27 og 2.25, at ligevægtsligningerne for snitkræfterne i konstruktionen vil have en entydig løsning, d.v.s. snitkræfterne er statisk uafhængige (jævnfør sætning 2.09).

Der kan da opstilles denne sætning, som kan bruges til fastlæggelse af den statiske bestemthed, i stedet for sætning 2.19.

Sætning 2.29:

Er en skivekonstruktion opbygget af N skivefelter og M søjler med ialt R ubekendte snitkræfter i samlingerne, og er konstruktionen stabil, da er den statisk bestemt med hensyn til disse snitkræfter, hvis $R = 3N + M$, - og statisk ubestemt, hvis $R > 3N + M$.

Sammenfatning

Den statiske beregning af en skivekonstruktion kan nu sammenfattes til følgende.

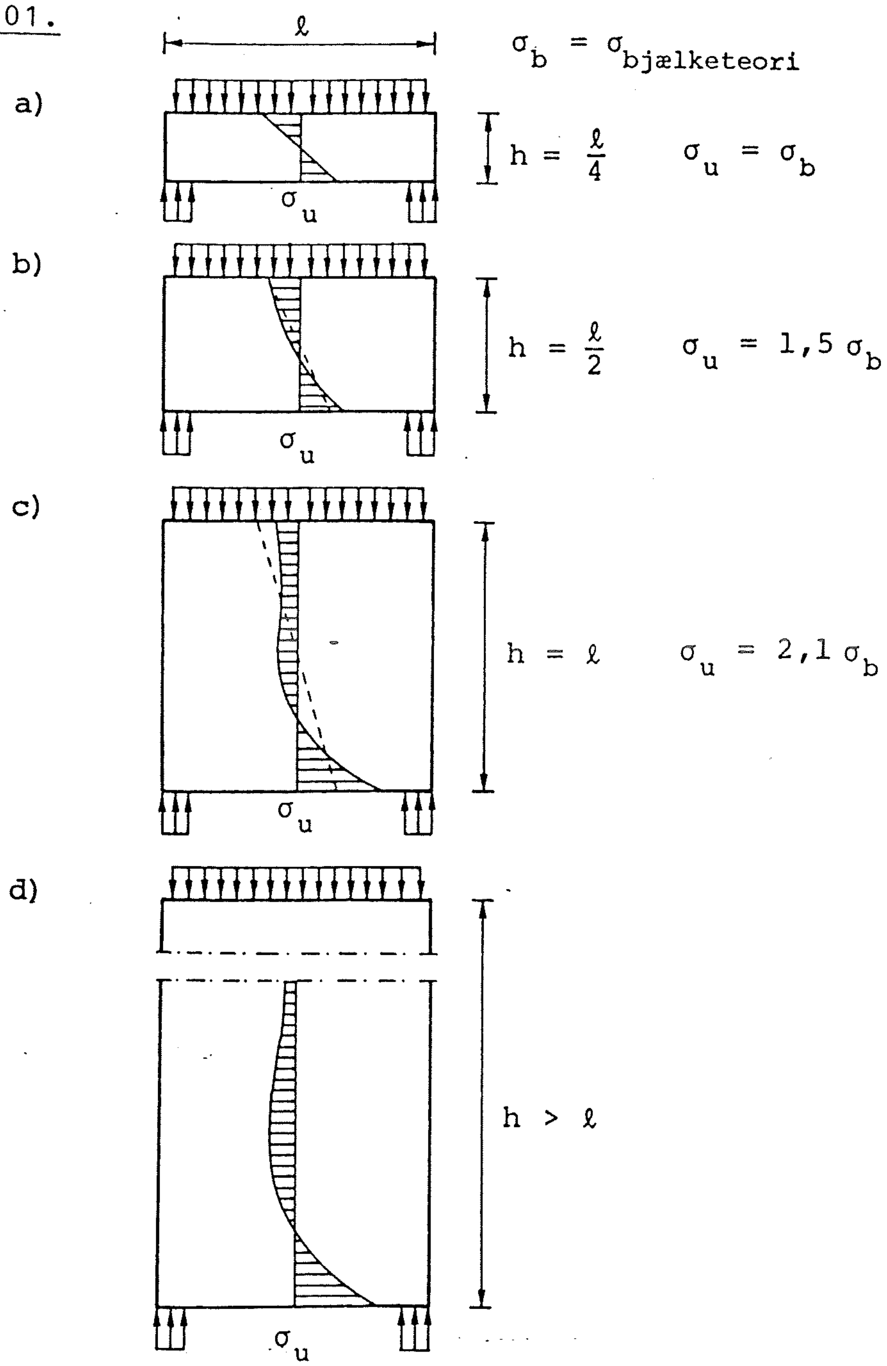
1) Først undersøges om skivekonstruktionen er stabil, f.eks. ved hjælp af den grafiske metode i kapitel 2.8.

2) Er skivekonstruktionen stabil, undersøges så, om snitkræfterne er statisk bestemte eller ubestemte, f.eks. ved hjælp af sætning 2.29.

3) Er skivekonstruktionen stabil og statisk bestemt, kan snitkræfterne beregnes, f.eks. som angivet i eksempel 2.08.

4) Er skivekonstruktionen stabil, men statisk ubestemt, vil snitkræfterne kunne beregnes, f.eks. som angivet i afsnittet om statisk ubestemte skivekonstruktioner.

Figur 3.01.


ℓ
$\sigma_b = \sigma_{bjælketeori}$
a)
$h = \frac{\ell}{4}$
$\sigma_u = \sigma_b$
σ_u
b)
$h = \frac{\ell}{2}$
$\sigma_u = 1{,}5\ \sigma_b$
σ_u
c)
$h = \ell$
$\sigma_u = 2{,}1\ \sigma_b$
σ_u
d)
$h > \ell$
σ_u

3. SPÆNDINGSFORDELINGEN I SKIVEFELTER

3.1 Indledning

Ved bæreevnebestemmelse af en skivekonstruktion er det ikke altid tilstrækkeligt kun at kende den snitkraftfordeling, som ydre påvirkninger giver anledning til. Normalt er det også nødvendigt at kende spændingsfordelingen i de enkelte konstruktionselementer, og denne er, som omtalt i forbindelse med figur 2.07 ikke entydigt bestemt, selvom snitkraftsfordelingen skulle være kendt.

For bjælker og søjler findes der velbeskrevne metoder (se f.eks. [4],[5],[6] og [7]) til beregning af bæreevne og spændingsfordeling ud fra kendskab til materialeegenskaber, geometri og ydre belastning (snitkraftfordeling).

For plader og skiver findes der ikke helt så generelle metoder. Det er faktisk kun et fåtal af tilfælde, hvor der findes metoder til eksakt bestemmelse af spændingsfordelingen. Derimod er der udviklet metoder til bæreevnebestemmelse af såvel skiver [8] som plader [9] og [10] af idealplastisk materiale.

Disse metoder har vist sig egnede til bæreevnebestemmelse for jernbetonkonstruktioner (brudstadieberegning).

Beregningen af spændingsfordelingen og deformationerne i elastiske skiver, hvilket inkluderer jernbetonskiver i det elastiske stadium (brugsstadieberegning) sker i vid udstrækning efter den tekniske bjælketeori. Denne fører imidlertid i en række tilfælde til misvisende resultater sammenlignet med de virkelige spændinger og deformationer.

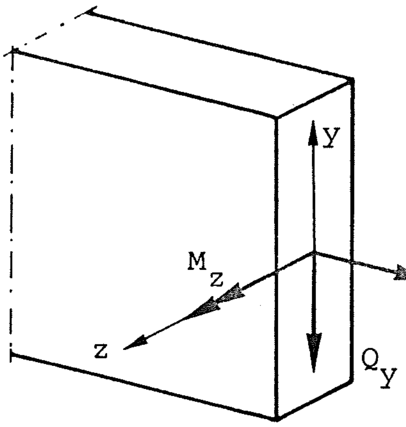
På figur 3.01 er vist en simpelt understøttet elastisk bjælke, som er udsat for en jævnt fordelt belastning langs sin overside. Bjælken har længden ℓ og har et rektangulært tværsnit med højden h. Normalspændingsfordelingen i bjælkens midtersnit vil beregnet efter bjælketeorien være retlinet uanset længde-højdeforholdet, medens forsøg ved brug af spændingsoptik (fotoelasticitet) [12] har vist, at spændingsfordelingen ikke er retlinet og i høj grad afhænger af højde-længdeforholdet. Som det fremgår af figur 3.01 b og c er maksimalspændingen 1,5 gange bjælketeoriens værdi, hvis bjælkelængden er 2 gange bjælkehøjden og 2,1 gange bjælketeoriens værdi, hvis bjælkehøjden er lig bjælkelængden.

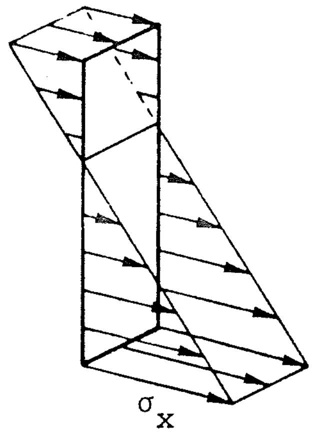
Da det beregningsmæssigt er tidsbesparende at anvende den tekniske bjælketeori fremfor skiveteorien tilnærmes skiver ofte med bjælker. Det er derfor hensigten i det følgende at redegøre for, hvornår den tekniske bjælketeori giver tilstrækkeligt gode resultater ved beregning af spændinger i skiver.

Indledningsvis gøres der kort rede for den tekniske bjælketeoris forudsætninger og formler, hvorefter skiveteorien beskrives, så en sammenligning bliver mulig.

Figur 3.02

80





$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z}y$$

Figur 3.03

Udledning af Grashof's formel.

$$Q_\ell dx = dN_1$$

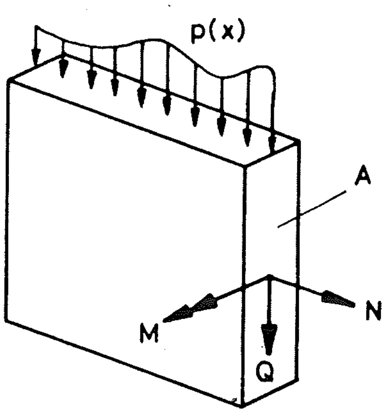
$$N_1 = \int_{A_1} \sigma_x dA = \int_{A_1}\left(\frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z}y\right)dA$$

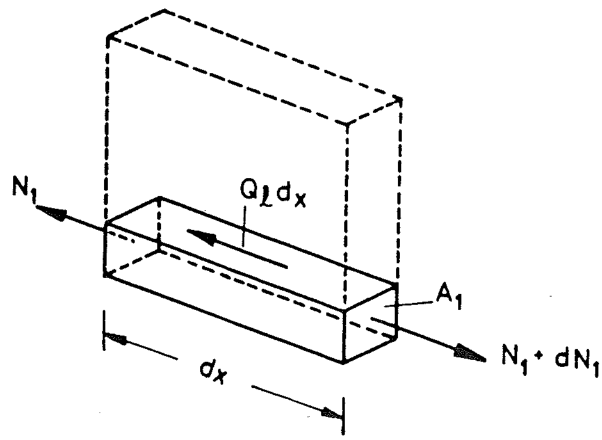
$$= N_x\frac{A_1}{A} - \frac{M_z}{I_z}\int_{A_1} ydA = N_x\frac{A_1}{A} - \frac{M_z}{I_z}\,\Delta S_z$$

$$Q_\ell = \frac{dN_1}{dx} = \frac{dN_x}{dx}\frac{A_1}{A} - \frac{dM_z}{dx}\frac{\Delta S_z}{I_z}$$

eller, idet $\frac{dN_x}{dx} = 0$ og $Q_y = -\frac{dM_z}{dx}$

$$Q_\ell = Q_y\,\frac{\Delta S_z}{I_z}$$





3.2 Teknisk bjælketeori

Den tekniske bjælketeori er udviklet for elastiske bjælker, der er retlinede, og som har konstant tværsnit i hele deres længde.

Bjælketeorien bygger på Bernoulli's antagelse om, at et plant normalsnit forbliver plant og vinkelret på bjælkeaksen under bjælkens deformation. D.v.s., at tøjningerne i bjælkeaksens retning fordeler sig retlinet henover bjælkens tværsnit.

Hooke's lov giver så umiddelbart, at normalspændingerne i bjælkeaksens retning også fordeler sig retlinet henover bjælketværsnittet.

På dette grundlag kan det så vises (se f.eks. [4]), at normalspændingsvariationen over et normalsnit kan udtrykkes ved

(3.01)
$$\boxed{\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} y}$$

Hvor N_x er normalsnitkraften i bjælkeaksens retning, A er tværsnittets areal, M_z er snitmomentet om en akse vinkelret på bjælkeaksen, og I_z er tværsnittets inertimoment om samme akse (se figur 3.02).

Uden brug af yderligere forudsætninger kan det ved hjælp af ligevægtsligningerne vises, at forskydningsspændingerne fordeler sig i snit parallelle med bjælkeaksen efter Grashof's formel

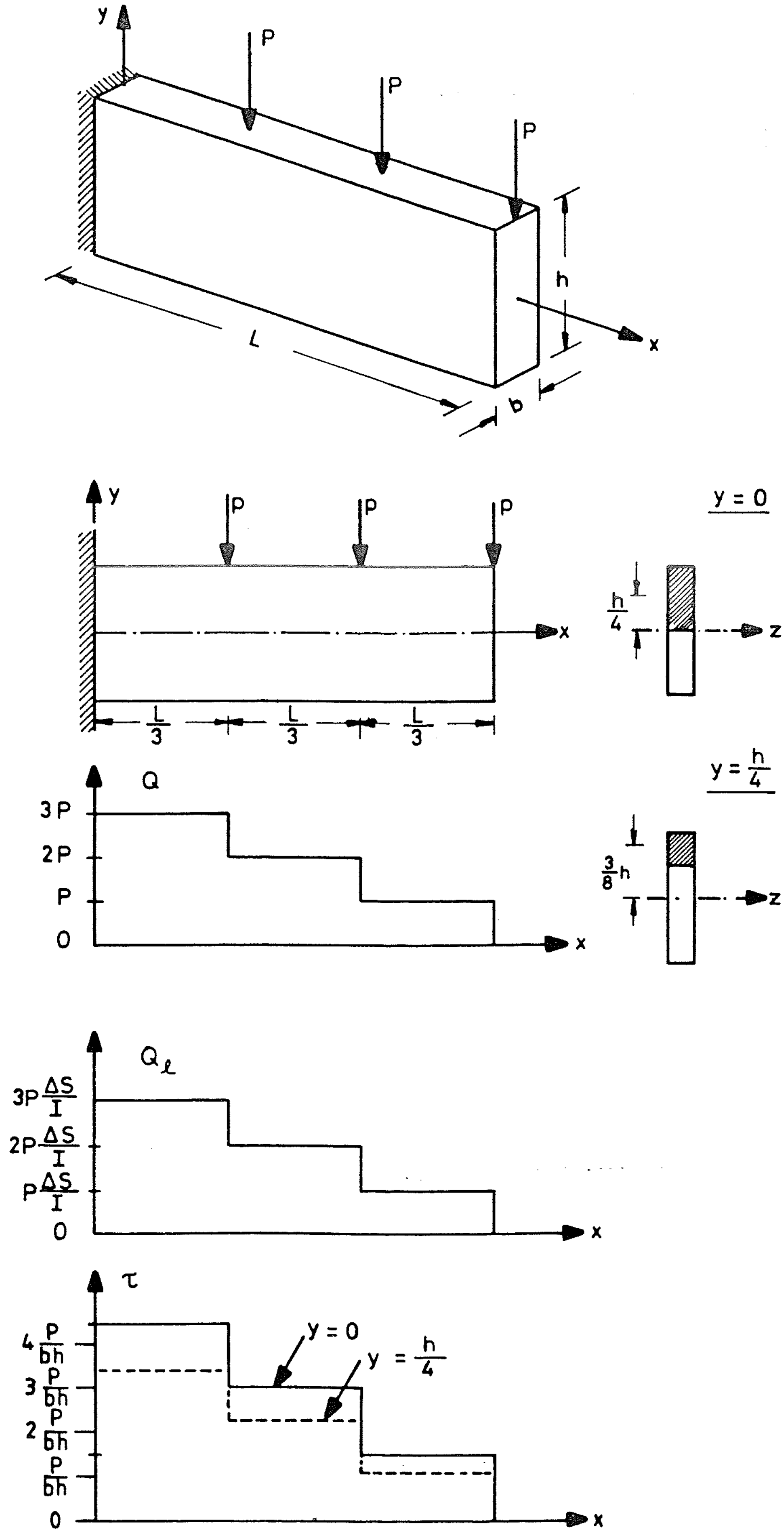
(3.02)
$$\boxed{Q_\ell = \frac{Q_y \Delta S_z}{I_z}}$$

hvor Q_ℓ er forskydningskraften pr. længdeenhed, Q_y er forskydningssnitkraften, og ΔS_z er det statiske moment om z-aksen af den afskårne del af tværsnitsarealet

(3.03)
$$\boxed{\Delta S_z = \int_{A_1} y\,dA}$$

Udfra visse antagelser om forskydningsspændingernes fordeling på tværs af tværsnittet, er det her ud fra muligt at beregne forskydningsspændingsfordelingen henover hele tværsnittet. Se figur 3.03.

Figur 3.04


y
P
P
P
h
x
L
b
y
p
p
p
x
L
3
L
3
L
3
y = 0
h
4
z
Q
3 P
2 P
P
0
x
y = h/4
3/8 h
z
Qℓ
3P ΔS/I
2P ΔS/I
P ΔS/I
0
x
τ
4 P/bh
3 P/bh
2 P/bh
P/bh
0
y = 0
y = h/4
x

Eksempel 3.01.

Betragtes en bjælke med rektangulært tværsnit af tykkelsen b og højden h fås umiddelbart:

$$A = h\,b \qquad I_z = \frac{1}{12} b\,h^3$$

hvoraf

(3.04)
$$\boxed{\sigma_x = \frac{N_x}{b\,h} - \frac{12\,M_z}{b\,h^3}\,y}$$

Er b << h kan forskydningsspændingen τ antages at være konstant på tværs af tværsnittet.

Af (3.03) fås:

(3.05)
$$\Delta S_z = \frac{1}{8} b\,h^2 \left[1 - \left(\frac{2\,y}{h}\right)^2\right]$$

For et snit i afstanden y fra z-aksen fås

(3.06)
$$\boxed{\tau = \frac{Q_\ell}{b} = \frac{3\,Q_y}{2\,b\,h}\left[1 - \left(\frac{2\,y}{h}\right)^2\right]}$$

Dette er de antagelser den tekniske bjælketeori bygger på, og den muliggør umiddelbart beregningen af de to spændinger σ_x og τ udfra tværsnitskonstanterne og snitkræfterne. Den tredje spændingskomponent σ_y antages at være nul, eller i hvert fald uden indflydelse på deformation og de to andre spændingskomponenter.

Eksempel 3.02.

En indspændt bjælke med længden L har rektangulært tværsnit med tykkelsen b og højden h. Bjælken er belastet med 3 enkeltkræfter P, se figur 3.04. Forskydningsspændingerne skal beregnes i et snit parallelt med bjælkeaksen dels midt i bjælkehøjden (y = o) og dels en fjerdedel nede i bjælken (y = h/4).

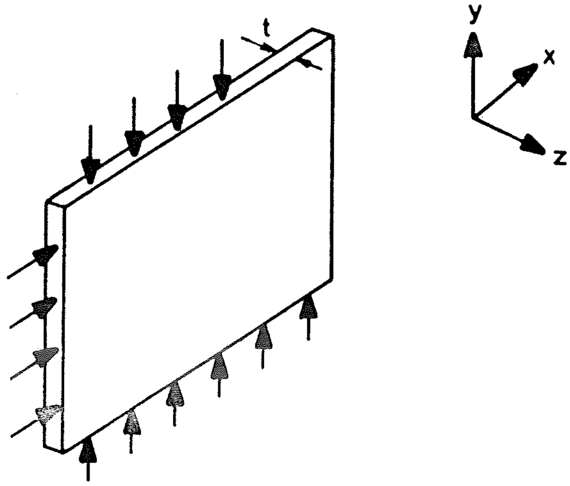
Vi har $I_z = \frac{1}{12}\,bh^3$.

Af (3.05) fås

for $y = 0$: $\Delta S_z = \frac{1}{8}bh^2$

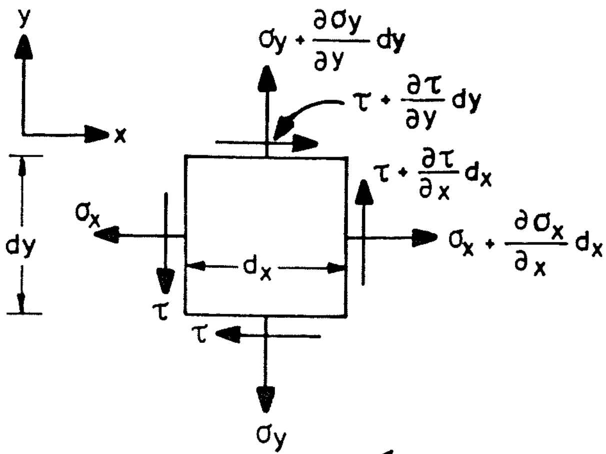
for $y = \frac{h}{4}$: $\Delta S_z = \frac{3}{32}bh^2$.

Figur 3.05



Plan skive,
konstant tykkelse : t
plan spændingstilstand
d.v.s. $\sigma_z = 0$

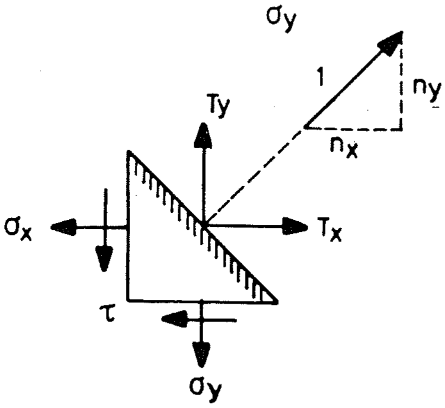
Ingen volumen-kræfter



Indre ligevægt

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$$



Randbetingelse

$$T_x = \sigma_x n_x + \tau n_y$$

$$T_y = \sigma_y n_y + \tau n_x$$

(83)

Af (3.02) fås

for $y = 0$: $Q_\ell = Q_y \cdot \frac{3}{2h}$

for $y = \frac{h}{4}$: $Q_\ell = Q_y \cdot \frac{9}{8h}$

Q_y er henh. 1P, 2P og 3P.

Forskydningsspændingerne bliver

for $y = 0$: $\tau = \frac{Q_\ell}{b} = Q_y \cdot \frac{3}{2hb}$

for $y = \frac{h}{4}$: $\tau = \frac{Q_\ell}{b} = Q_y \cdot \frac{9}{8hb}$

Q_y henh. 1P, 2P og 3P.

Se figur 3.04.

3.3 Plan spændingstilstand

Fra kontinuummekanikken ([11] ligning (10)) vides, at ligevægtsbetingelserne for spændingerne i et kontinuum kan udtrykkes ved:

(3.07) $$\sigma_{ij,j} + q_i = 0 \;;$$

hvor σ_{ij} er spændingstensoren, og q_i er volumenkraften pr. volumenenhed, medens "komma" betegner partiel differentation med hensyn til den efterstående koordinat. Endvidere skal spændingerne opfylde randbetingelsen ([11] ligning (12))

(3.08) $$\sigma_{ij}\, n_j = T_i \;;$$

hvor n_j er randens normalvektor og T_i overfladebelastningen pr. overfladeareal-enhed.

Ved behandlingen af skiver med konstant tykkelse, der udelukkende er belastet med skivekræfter, ses der normalt bort fra spændingerne vinkelret på skiveplanet, og spændingerne i planet antages at være konstante over skivetykkelsen.

Spændingstilstanden siges at være plan.

Betegnes koordinaterne i skiveplanet x og y, og anvendes de kortere betegnelser σ_x, σ_y og τ i stedet for σ_{xx}, σ_{yy} og $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, vil ligevægtsbetingelserne (3.07), hvis der også ses bort fra volumenkræfterne, kunne skrives:

(3.09)
$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{,y} &= 0 \\ \tau_{,x} + \sigma_{y,y} &= 0 \end{aligned}}$$

Randbetingelserne bliver tilsvarende

(3.10)
$$\boxed{\begin{aligned} T_x &= \sigma_x n_x + \tau n_y \\ T_y &= \sigma_y n_y + \tau n_x \end{aligned}}$$

Disse fire ligninger skal en spændingsfordeling i en skive opfylde for at de statiske ligevægts- og randbetingelser kan være opfyldt. Ligningerne gælder uanset skivens materialeegenskaber, og er altså ikke indskrænket til kun at gælde elastiske materialer. For de enkelte materialer gælder der imidlertid et sæt konstitutive ligninger og desuden et sæt geometriske betingelser (kompatibilitetsbetingelserne), som afstedkommer endnu nogle betingelser, som spændingerne skal opfylde.

I næste kapitel 3.4 undersøges en række spændingstilstande, der blot opfylder (3.09) og (3.10), hvorefter de ekstra betingelser for elastiske materialer indføres i kapitel 3.5.

86

3.4 Airy's spændingsfunktion

De to sammenhørende førsteordens partielle differentialligninger (3.09) med randbetingelserne (3.10) lader sig ikke umiddelbart løse.

Det har vist sig muligt at reducere antallet af ubekendte til een ubekendt funktion F{x,y}, Airy's spændingsfunktion, hvis det blot kræves, at funktionens differentiationsorden er vilkårlig.

Defineres der ud fra denne funktion et sæt spændinger på følgende måde

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= F_{,yy} \\ \sigma_y &= F_{,xx} \\ \tau &= -F_{,xy} = -F_{,yx} \end{aligned}} \tag{3.11}$$

ses ved indsættelse i (3.09) at kravet er

$$\boxed{\begin{aligned} F_{,yyx} - F_{,xyy} &= 0 \\ F_{,xyx} - F_{,xxy} &= 0 \end{aligned}} \tag{3.12}$$

Disse vil altid være opfyldt, hvis differentiationsordenen, som forudsat, er vilkårlig.

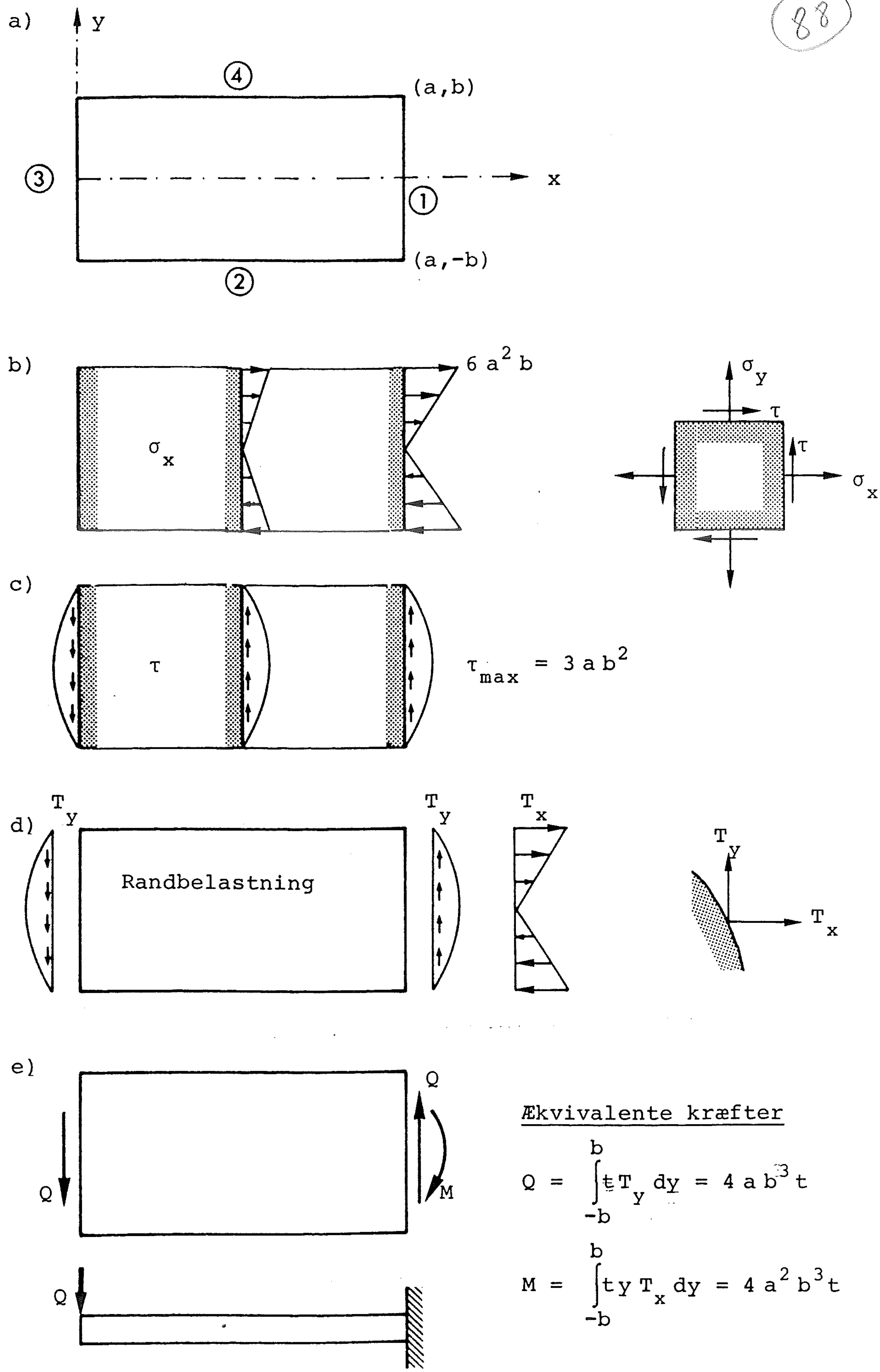
De spændinger, der kan afledes af funktionen F{x,y}, ses således automatisk at opfylde ligevægtsbetingelserne i det indre af en vægtløs skive. Randbetingelserne, der også skal være opfyldt, kan udtrykkes ved F{x,y} ved indsættelse af (3.11) i (3.10)

$$\boxed{\begin{aligned} T_x &= F_{,yy}\, n_x - F_{,xy}\, n_y \\ T_y &= F_{,xx}\, n_y - F_{,xy}\, n_x \end{aligned}} \tag{3.13}$$

Hvis randspændingerne er kendt i et konkret tilfælde, indskrænkes undersøgelserne således til at finde en funktion F{x,y}, der blot skal opfylde (3.13) langs randene.

Omvendt er det muligt at undersøge en række funktioner for at finde frem til, hvilken spændingstilstand funktionen svarer til. Anvendes polynomier i x og y, ses dels, at (3.12) altid er opfyldt, idet differentiationsordenen er vilkårlig for

Figur 3.06



Ækvivalente kræfter

$$Q = \int_{-b}^{b} t\,T_y\,dy = 4ab^3t$$

$$M = \int_{-b}^{b} t\,y\,T_x\,dy = 4a^2b^3t$$

polynomier, dels at kun polynomier af anden eller højere orden giver anledning til spændinger forskellige fra nul (jfr. (3.11)).

Eksempel 3.03.

$$F\{x,y\} = a\,x\,y(y^2 - 3\,b^2),$$

hvor a og b er konstanter.

Spændingerne bliver i henhold til (3.11):

$$\sigma_x = F_{,yy} = 6\,a\,x\,y$$

$$\sigma_y = F_{,xx} = 0$$

$$\tau = -F_{,xy} = 3\,a(b^2 - y^2)$$

Betragtes nu en skive, der er begrænset af linierne $x = 0$, $x = a$, $y = b$ og $y = -b$, som vist på figur 3.06 a, vil spændingerne variere som vist på figur 3.06 b og c.

Idet de fire rande har normalvektorerne: (1,0), (0,-1), (-1,0) og (0,1) fås af (3.13) randbelastningen:

Rand 1: $x = a \;;\; -b \le y \le b$

$$T_x = F_{,yy} = 6\,a^2\,y$$

$$T_y = -F_{,xy} = 3\,a(b^2 - y^2)$$

Rand 2: $a \le x \le a \;;\; y = -b$

$$T_x = F_{,xy} = 0$$

$$T_y = -F_{,xx} = 0$$

Rand 3: $x = 0 \;;\; -b \le y \le b$

$$T_x = -F_{,yy} = 0$$

$$T_y = F_{,xy} = -3\,a(b^2 - y^2)$$

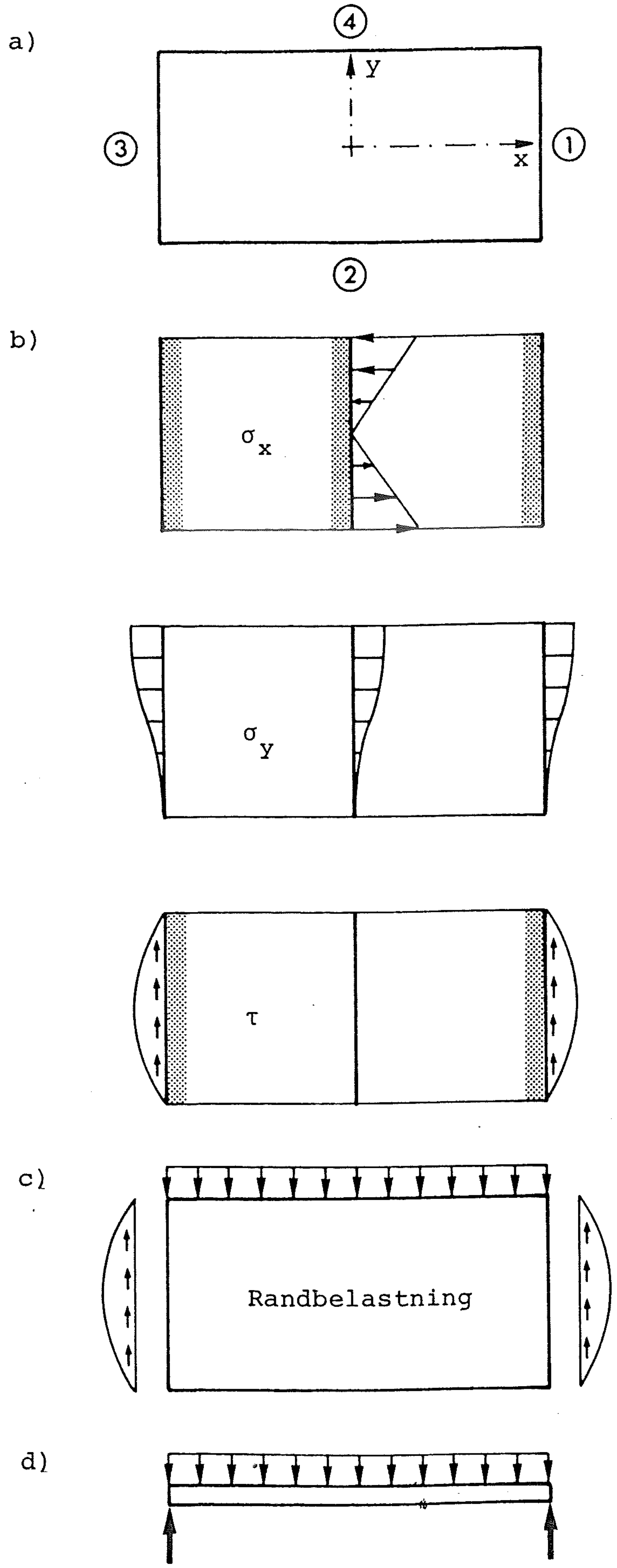
Rand 4: $0 \le x \le a \;;\; y = b$

$$T_x = -F_{,xy} = 0$$

$$T_y = F_{,xx} = 0$$

Disse randbelastninger er vist på figur 3.06 d Udfra disse spændinger kan de ækvivalente kræfter beregnes,

Figur 3.07



som vist på figur 3.06 e. De ses at svare til snitkræfter og belastninger på et skivefelt indspændt langs rand 1. Beregnes spændingerne i en indspændt bjælke med rektangulært tværsnit, der er belastet med en enkeltkraft, ved hjælp af den tekniske bjælketeori fås den samme spændingsfordeling.

Den her anvendte spændingsfunktion giver altså en spændingstilstand, som også ville kunne beregnes ud fra den tekniske bjælketeori.

Eksempel 3.04.

$$F\{x,y\} = (x^2 - a^2)y^3 - b^2(2b + 3y)x^2$$

hvor a og b er konstanter.

Spændingerne bliver

$$\sigma_x = 6(x^2 - a^2)y$$

$$\sigma_y = 2y^3 - 2b^2(2b + 3y)$$

$$\tau = 6x(b^2 - y^2)$$

Betragtes en skive, der er begrænset af linierne $x = -a$, $x = a$, $y = b$ og $y = -b$, som vist på figur 3.07 a, vil spændingerne variere som vist på figur 3.07 b. Randbelastningerne beregnes på samme måde som i forrige eksempel og er vist på figur 3.07 c.

Den med ækvivalente snitkræfter belastede skive ses denne gang at svare til en simpelt understøttet bjælke med jævnt fordelt belastning.

Såvel σ_x som τ vil være de samme værdier, som den tekniske bjælketeori giver, hvorimod bjælketeorien ikke giver værdier for σ_y.

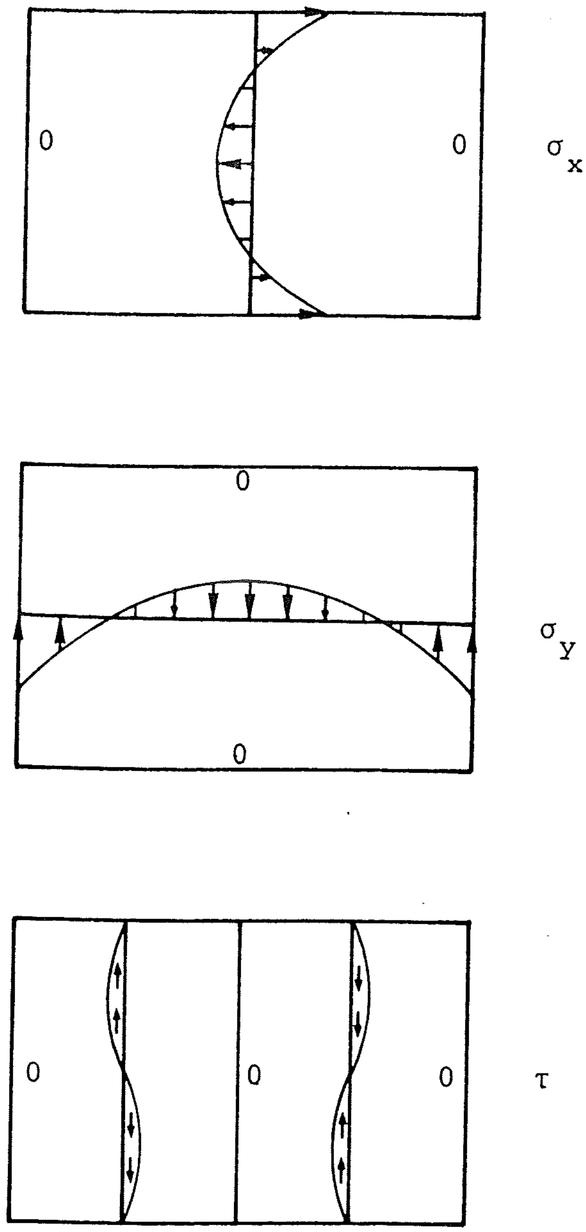
Forholdet mellem maksimal σ_x og maksimal σ_y ses at være

$$\frac{\sigma_y^{max}}{\sigma_x^{max}} = \frac{4}{3}\frac{b^2}{a^2}$$

D.v.s., at de to spændinger omtrent er lige store, hvis skiven er kvadratisk ($a = b$), medens forholdet er lig 1% for $a = 10\,b$. Det sidste viser berettigelsen i at se bort fra σ_y ved an-

92

Figur 3.08



(91)

vendelsen af den tekniske bjælketeori, hvis spændvidden er stor i forhold til bjælkehøjden.

Den egentlige opgave var til givne randspændinger at finde en funktion F{x,y}, der langs randen opfyldte (3.13). Denne opgave viser sig imidlertid ikke at have en entydig løsning, idet ethvert spændingsfelt, der er nul langs randene, også vil være en løsning.

Eksempel 3.05:

$$F\{x,y\} = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

For denne funktion bliver spændingerne

$$\sigma_x = 4(3y^2 - b^2)(x^2 - a^2)^2$$

$$\sigma_y = 4(3x^2 - b^2)(y^2 - b^2)^2$$

$$\tau = -16\,xy(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

Betragtes et rektangulært skivefelt, med randene x = -a, x = a, y = b og y = -b, ses, at randspændingerne er lig nul. Spændingerne inden for randen er imidlertid ikke lig nul (se figur (3.08), og denne spændingstilstand vil kunne overlejres den i eksempel 3.04 behandlede, uden at det ændrede randbetingelserne i skiven på figur 3.07 c.

---

(93)

3.5 Elastiske skiver og den tekniske bjælketeori

Spændingstilstandene i forrige kapitel blev kun undersøgt for, om de opfyldte de statiske betingelser. For at en spændings-tøjningstilstand skal kunne forekomme i et kontinuum fordres imidlertid også to andre sæt betingelser opfyldt, nemlig de geometriske og de fysiske betingelser.

De geometriske betingelser, der sikrer kontinuets sammenhæng efter deformationen, kaldes også kompatibilitetsbetingelserne og er ifølge [11] ligning (46):

(3.14)
$$\boxed{e_{ik,j\ell} + e_{j\ell,ik} - e_{i\ell,jk} - e_{jk,i\ell} = 0}$$

hvor e_{ij} er tøjningstensoren.

De fysiske betingelser, der udtrykker sammenhængen mellem spændinger og tøjninger, kaldes også de konstitutive ligninger. For et homogent isotropt og elastisk materiale er de konstitutive ligninger ([11] ligning (74))

(3.15)
$$\boxed{e_{ij} = -\delta_{ij}\,\frac{\nu}{E}\,\sigma_{kk} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij}}$$

hvor δ_{ij} er Kroneckers delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ for } i = j \\ 0 \text{ for } i \neq j \end{cases}$$

Ved brug af (3.15) er det muligt at udtrykke kompatibilitetsbetingelserne (3.14) ved spændinger. Specielt for den plane spændingstilstand og vægtløs skive gælder ([11] ligning (87))

$$\sigma_{11,11} + \sigma_{22,22} + \sigma_{11,22} + \sigma_{22,11} = 0$$

eller idet x-y-koordinater anvendes

(3.16)
$$\boxed{\sigma_{x,xx} + \sigma_{y,yy} + \sigma_{x,yy} + \sigma_{y,xx} = 0}$$

Udtrykkes spændingerne ved Airy's spændingsfunktion (3.11) kan kompatibilitetsbetingelserne i stedet skrives som

(3.17)
$$\boxed{F_{,xxxx} + 2\,F_{,xyxy} + F_{,yyyy} = 0}$$

Det betyder, at en spændingsfunktion $F\{x,y\}$, der langs randene opfylder (3.13) og indenfor desuden (3.17) vil være en

(94)

mulig spændingstilstand for en elastisk skive. Det kan vises, at der kun findes een spændingstilstand, som opfylder de elastiske betingelsesligninger for givne randbetingelser (se [13] afsnit 82).

Kendes spændingerne vil tøjningerne kunne beregnes af (3.15):

$$\boxed{\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\,\sigma_y) \\ e_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\,\sigma_x) \\ e_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \varphi_{xy} &= \frac{\tau}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\,\tau \end{aligned}} \tag{3.18}$$

Omvendt fås

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(e_x + \nu\,e_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(e_y + \nu\,e_x) \\ \tau &= G\,\varphi_{xy} \end{aligned}} \tag{3.19}$$

Disse udtryk kan anvendes til at påvise, at den tekniske bjælketeori forudsætter en enakset spændingstilstand.

Bjælketeorien forudsætter, at tøjningen i bjælkeaksens retning er

$$e_x = e_N + \kappa\,y \tag{3.20}$$

hvor e_N er tøjningen for $y = 0$, og κ er krumningen, som er uafhængig af y.

Skal spændingerne kunne bestemmes af (3.19) kræves kendskab til endnu een størrelse.

<u>Er $e_y = 0$ fås</u>

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(e_N + \kappa\,y)$$

$$\sigma_y = \nu\,\sigma_x$$

hvilket ikke stemmer med antagelsen om at

$$\sigma_x = E\,e_x \tag{3.21}$$

(95)

Er i stedet $\sigma_y = 0$, fås af den anden ligning i (3.19), at

$$e_y = -\nu\, e_x ,$$

som indsat sammen med (3.20) i den første ligning i (3.19), giver

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(e_N + \kappa\, y)(1 - \nu^2)$$
$$= E(e_N + \kappa\, y) = E\, e_x ,$$

hvilket svarer til bjælketeoriens antagelse.

Den tekniske bjælketeori svarer altså til en skive med normalspændingstilstanden

(3.22) $$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= E(e_N + \kappa\, y) \\ \sigma_y &= 0 \end{aligned}}$$

hvor e_N og κ er uafhængige af y. Forskydningsspændingerne fås af (3.09), idet den anden ligning giver (da $\sigma_y = 0$), at

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = k_o + f\{y\}$$

og indsat i den første fås så

$$\frac{d\,\tau}{d\,y} = -\frac{\partial\, \sigma_x}{\partial\, x}$$

Da σ_x i henhold til (3.22) generelt kan skrives

(3.23) $$\boxed{\sigma_x = k + f_1\{x\} + f_2\{x\} y}$$

bliver forskydningsspændingen

(3.24) $$\boxed{\tau = k_o - \frac{\partial f_1}{\partial x} y - \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x} y^2}$$

hvor integrationskonstanten k_o fastlægges af randspændingerne.

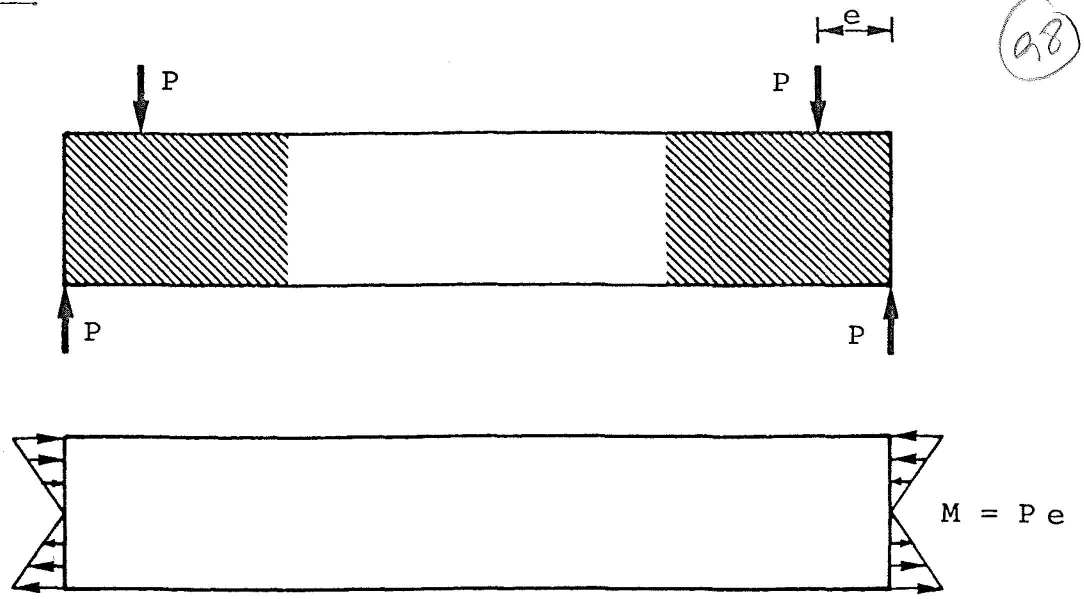
Den tekniske bjælketeori vil således kun give korrekte spændinger i en skive, hvis bjælken (skiven) er belastet med normalspændinger i x-retningen, givet ved (3.23) og med forskydningsspændinger, givet ved (3.24).

At den tekniske bjælketeori alligevel giver tilstrækkeligt gode resultater i mange tilfælde for andre belastninger, kan forklares ud fra Saint-Venants princip, som omtales i næste kapitel.

Figur 3.09

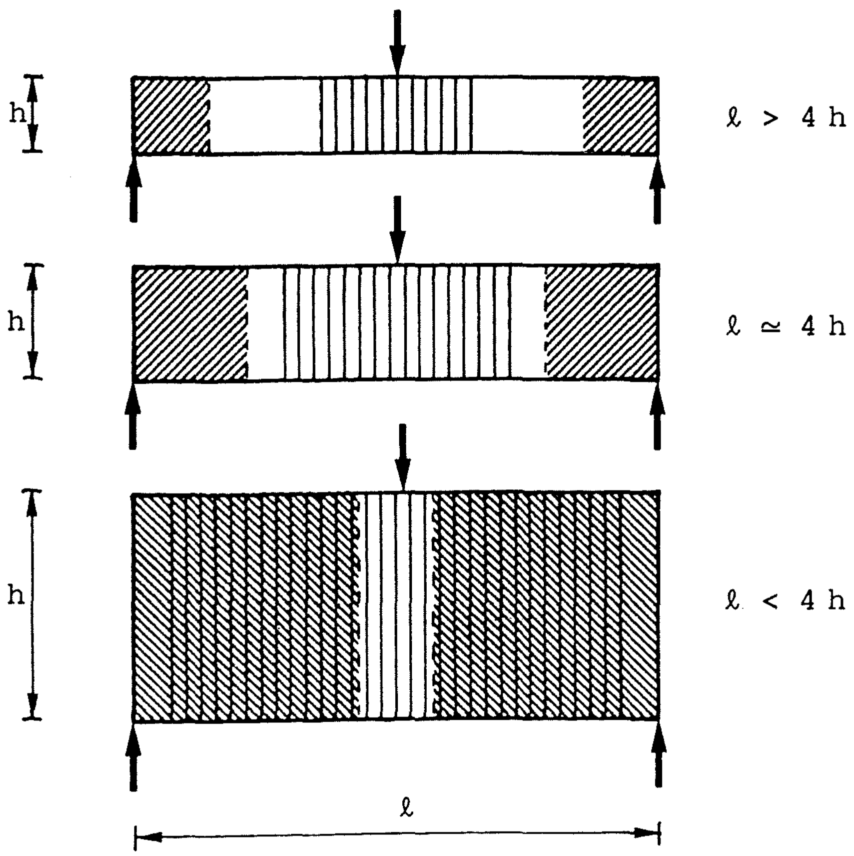
a)

b)



Udenfor de skraverede områder giver bjælke-
teorien korrekte værdier

Figur 3.10



Udenfor de skraverede områder giver bjælke-
teorien korrekte værdier

(97)

3.6 Saint-Venants princip

Saint-Venants princip lyder:
"Erstattes belastningen på et lille område i et elastisk medium med en dermed statisk ækvivalent belastning, vil ændringerne i spændinger og tøjninger være umærkelige i dele af mediet tilstrækkeligt langt fra det belastede område."

Princippet er illustreret på figur 3.09 hvor en plan bjælke, dels er belastet med kraftpar P ved enderne (figur 3.09 a), dels er belastet med en statisk ækvivalent normalspændingsfordeling (figur 3.09 b) Tilstrækkeligt langt fra disse belastninger vil spændingstilstanden altså være den samme i henhold til Saint-Venants princip, og det vil i dette tilfælde sige omkring bjælkemidten. Belastningen på figur 3.09 b svarer til en, hvor bjælketeorien giver korrekte resultater overalt, hvorfor bjælketeorien også for tilfældet på figur 3.09 a vil give korrekte spændinger tilstrækkeligt langt fra belastningen (d.v.s. i det uskraverede område).

Der findes intet egentligt bevis for Saint-Venants princip, men princippet har vist sig at passe i så mange tilfælde, at dets gyldighed er almindeligt anerkendt. Problemet er blot, hvor langt væk "tilstrækkeligt langt" er.

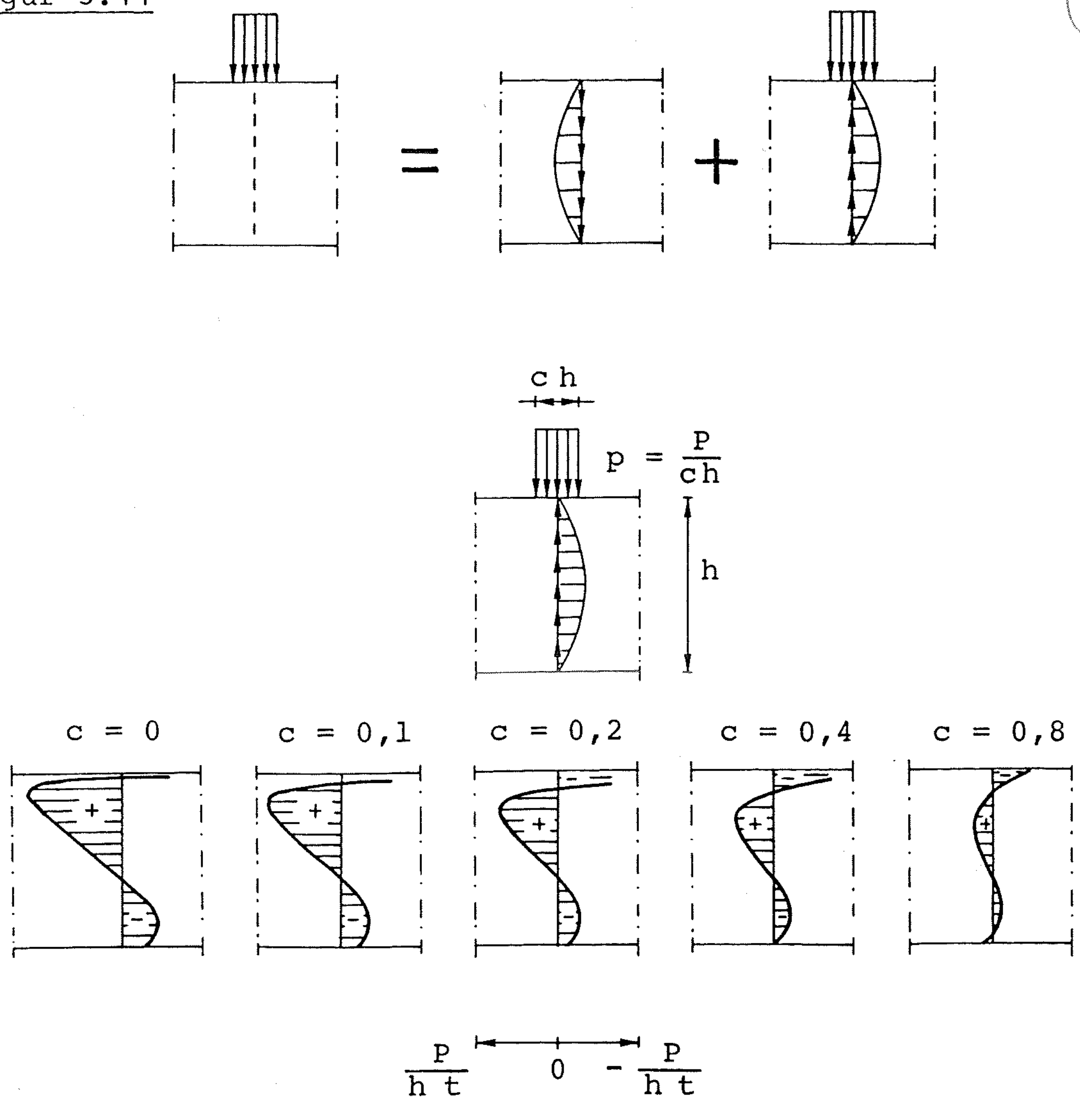
For bjælker regnes, at afstande større end bjælkehøjden fra en belastning er tilstrækkeligt langt væk.

Det vil sige, at bjælketeorien vil give korrekte spændinger i afstande fra belastningen, der er større end bjælkehøjden. På figur 3.10 er vist, hvordan disse områder formindskes med bjælkehøjden.

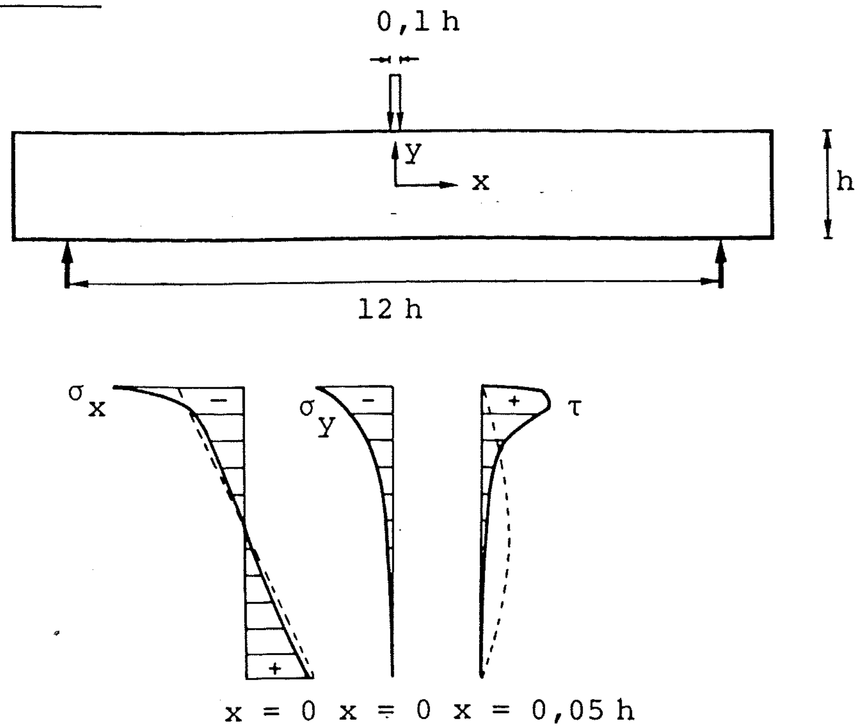
I afstande mindre end bjælkehøjden fra en belastning, vil spændingstilstandens afvigelse fra bjælketeoriens værdier afhænge af forskellen mellem belastningen og en af de ved (3.23) og (3.24) bestemte belastninger.

Denne differensspændingstilstand er bl.a. undersøgt af Schleeh [14] og [15]. På figur 3.11 er vist differensnormalspændingerne som en jævnt fordelt belastning med forskellige belastningsbredder giver anledning til under belastningen i en lang bjælke.

Figur 3.11

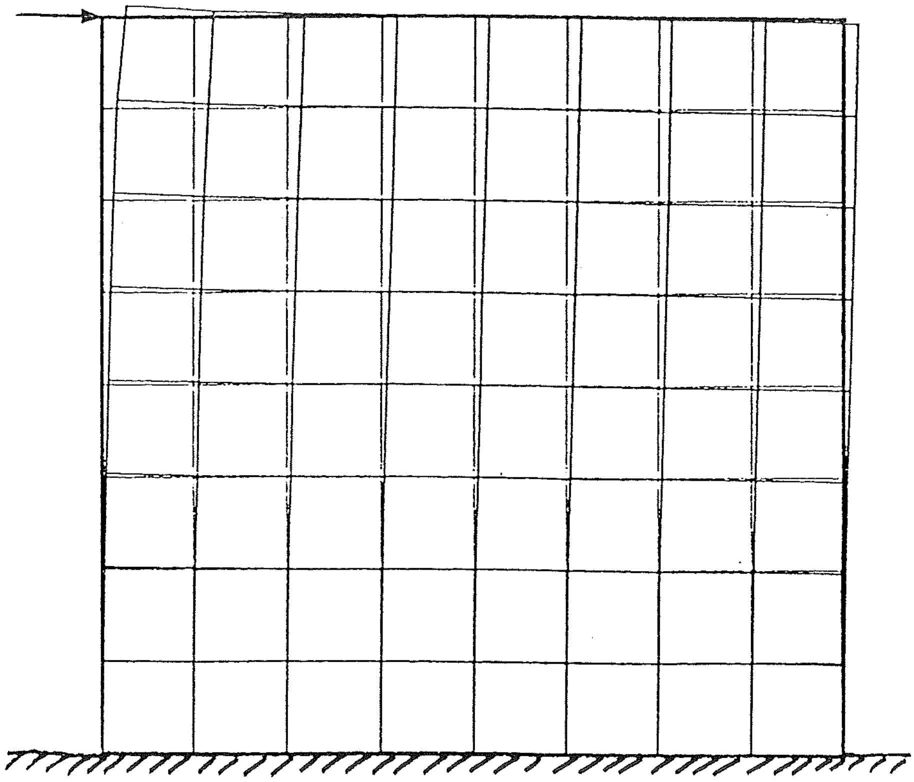


Figur 3.12

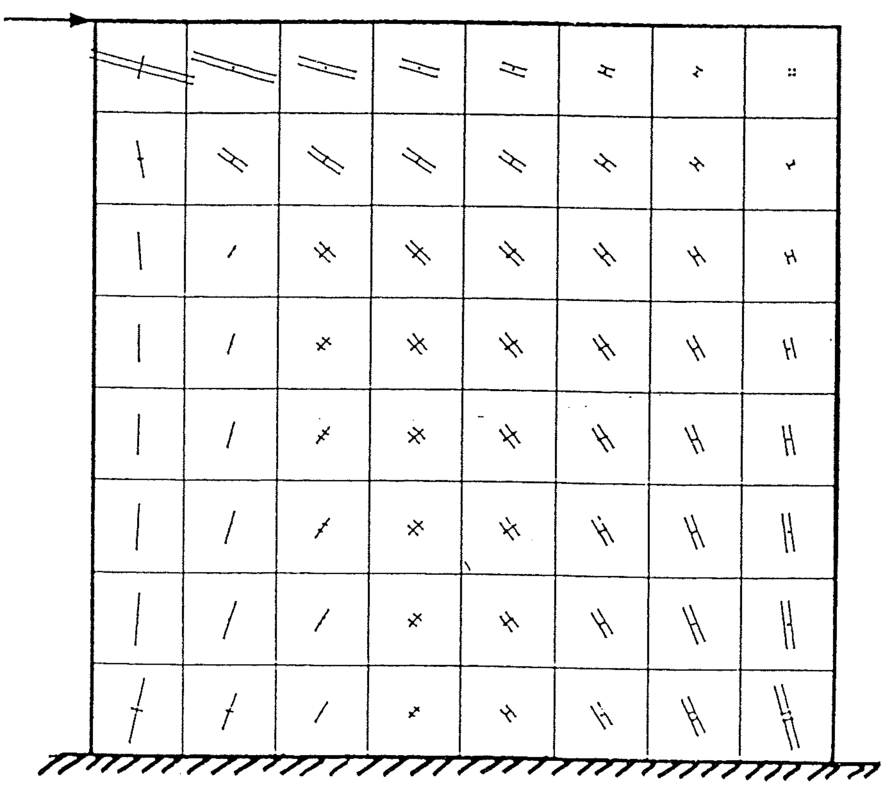


Differensspændingerne afhænger kun af den lokale geometri og belastning. Det betyder, at bjælketeoriens værdier kan blive helt dominerende, f.eks. hvis en bjælkes spændvidde øges. Et eksempel på differensspændingernes størrelse er vist på figur 3.12.

Generelt kan det siges, at jo mere en given randbelastning ligner en af bjælketeoriens "accepterede", des bedre vil overensstemmelsen være mellem virkelige spændinger og de værdier, som bjælketeorien giver. Ved koncentrerede belastninger vil der lokalt kunne optræde store spændinger, som selvfølgelig skal tages i regning, men virkningen af koncentrationen er et lokalt fænomen.



Figur 3.13 Eksempel på kvadratisk skive opdelt i kvadratiske elementer. Desuden er det deformerede net optegnet svarende til den viste enkeltkraftsbelastning.



Figur 3.14 Hovedspændingsforløbet i skiven på figur 3.13.

Dobbeltstreg angiver trykspænding i den angivne hovedretning og enkeltstreg trækspænding. Længden er proportional med spændingens størrelse.

(103)

4. STATISK UBESTEMTE SKIVEKONSTRUKTIONER

De fleste forekommende skivebygninger vil være statisk ubestemte konstruktioner, og snitkræfterne i vægge og dækskiver vil således ikke kunne beregnes alene på grundlag af de statiske ligevægtsligninger.

4.1 Beregningsmodellerne, generelt

Der eksisterer ingen generel model, der kan anvendes til at beregne den korrekte spændingsfordeling i enhver skivekonstruktion. Dette skyldes flere forhold.

For at kunne beregne en skivekonstruktions spændingsfordeling kræves først og fremmest kendskab til konstruktionens geometri og fysiske egenskaber (d.v.s. de konstitutive ligninger for de indgående materialer).

En hensyntagen til alle variationsmuligheder i geometri og materialevalg vil komplicere beregningerne i en grad, hvor den opnåede generalisering ikke kan opveje det væsentligt større beregningsarbejde.

Med de usikkerheder, der er knyttet til de i beregningerne indgående geometriske og fysiske størrelser, vil der desuden være en grænse, hvor en nøjagtigere beregning kun kan forbedre resultaterne med størrelser, der er mindre end den faktiske usikkerhed på de beregnede størrelser.

Endelig spiller det ind, hvor nøjagtigt spændingsfordelingen faktisk ønskes beregnet. Ved dimensionering, hvor det skal sikres, at modstandsevnen (bæreevnen) er større end påvirkningen, kræves i princippet kun denne ene betingelse opfyldt. D.v.s., at kan påvirkningen under hensyntagen til beregningsusikkerheden påvises at være mindre end den tilsvarende modstandsevne, så er dimensioneringsopgaven løst.

Når de behandlede skivekonstruktioner indskrænkes til kun at omfatte bygninger opbygget af præfabrikerede betonelementer, vil en væsentlig del af de før omtalte variationsmuligheder være elimineret. Byggematerialet er nu indskrænket til beton og armering.

Geometrien er forenklet til enten tværvægge eller længdevægge; etagehøjden er den samme i alle etager, alle plader er simpelt understøttede, o.s.v..

Denne variantbegrænsning har gjort det muligt at opstille beregningsmodeller, der er forholdsvis enkle og overkommelige at klare ved håndregning.

De forenklede beregningsmodeller giver selvfølgelig kun tilnærmede værdier for de søgte størrelser, men dog med den nøjagtighed, der er accepteret i forbindelse med normernes fastlæggelse af partialkoefficienter.

Ønskes der regnet med større nøjagtighed, kræver det et større regnearbejde, og til det brug er der i dag udviklet EDB-programmer, som dækker en hel del af problematikken.

4.2 Dækskivefordelingsmetoden, generelt

Metoden kan bruges til at finde fordelingen af vandret last på de enkelte vægge i en skivebygning, hvor konstruktionen er statisk ubestemt.

Metoden bygger på følgende antagelser:

1) Dækkene forudsættes at være uendelig stive i deres plan, medens de enkelte dækelementer virker som enkeltspændte simpelt understøttede plader over for pladebelastning.

2) Væggene forudsættes at kunne beregnes som elastiske bjælker, der er indspændte i fundamentet. - Spændingerne antages således at kunne beregnes ved hjælp af den tekniske bjælketeori.

   Væggene kan være plane vægge eller vægprofiler. - Plane vægge regnes uendelig slappe på tværs af deres plan.

Disse forudsætningers gyldighed bliver taget op til diskussion senere.

Kan forudsætningerne for dækskivefordelingsmetoden ikke antages at være opfyldt som en akceptabel tilnærmelse, kan man i stedet for anvende f.eks. en elementmetode-beregning, som omtalt senere.

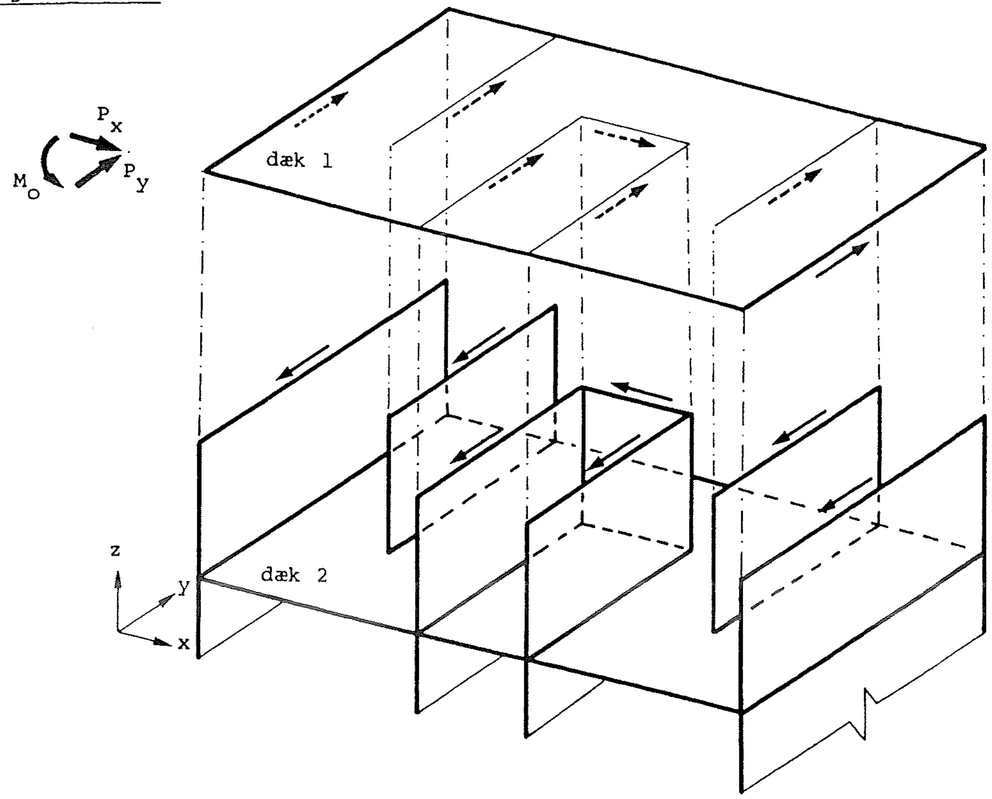
4.3 Dækskivefordelingsmetoden for vægge og vægprofiler med hovedakser parallelle med en x-akse og en y-akse

Formlerne til beregning af snitkræfterne mellem vægge og dækskive for en vandret last på dækskiven udledes for en skivekonstruktion med én dækskive på et system af vægge. Formlerne kan i almindelighed bruges på fler-etages skivebygninger. Formlernes anvendelse på fleretages konstruktioner tages op til diskussion senere.

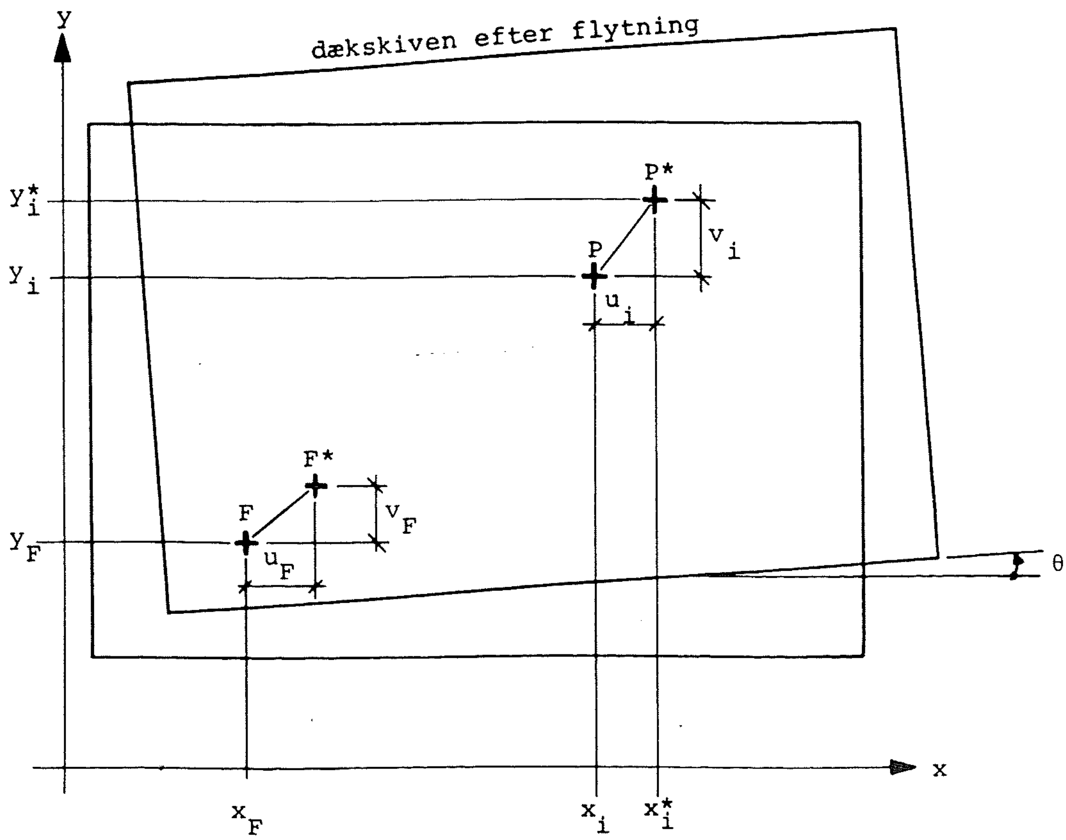
Beregningsmetoden baserer sig på følgende:

107

Figur 4.01



Figur 4.02



Dækskivens flytning

Dækskiven, som forudsættes stiv i sit plan, vil, når den udsættes for en belastning, få en flytning, der kan sammensættes af en translation og en rotation som vist på figur 4.02 . Denne flytning vil blive søgt hindret af de elastiske vægge, der virker som fjedre, og som derfor påvirker dækskiven med kræfter, der er proportionale med den påtvungne flytning. Da "fjederkonstanterne" kan beregnes ud fra væggenes geometri, bliver de ubekendte i beregningerne i første omgang kun dækskivens translation og rotation. Når disse størrelser er bestemt, kendes væggenes påtvungne flytninger og med kendskab til "fjederkonstanterne", kan snitkræfterne mellem dæk og vægge beregnes.

Betragtes dækskivens flytning (figur 4.02) kan den beskrives ved flytningen af et punkt F i dækskiveplanet og en rotation om dette punkt.

Betegner (u_F, v_F) flytningsvektoren $\overline{FF^*}$'s komponenter og θ drejningsvinklen, kan flytningsvektoren $\overline{PP^*}$ for et andet punkt i dækskiveplanet med udgangskoordinaterne (x_i, y_i) skrives som

$$u_i = x_i^* - x_i \qquad (4.01)$$
$$v_i = y_i^* - y_i$$

hvor

$$x_i^* = x_F + u_F + (x_i - x_F)\cos\theta - (y_i - y_F)\sin\theta \qquad (4.02)$$
$$y_i^* = y_F + v_F + (x_i - x_F)\sin\theta + (y_i - y_F)\cos\theta$$

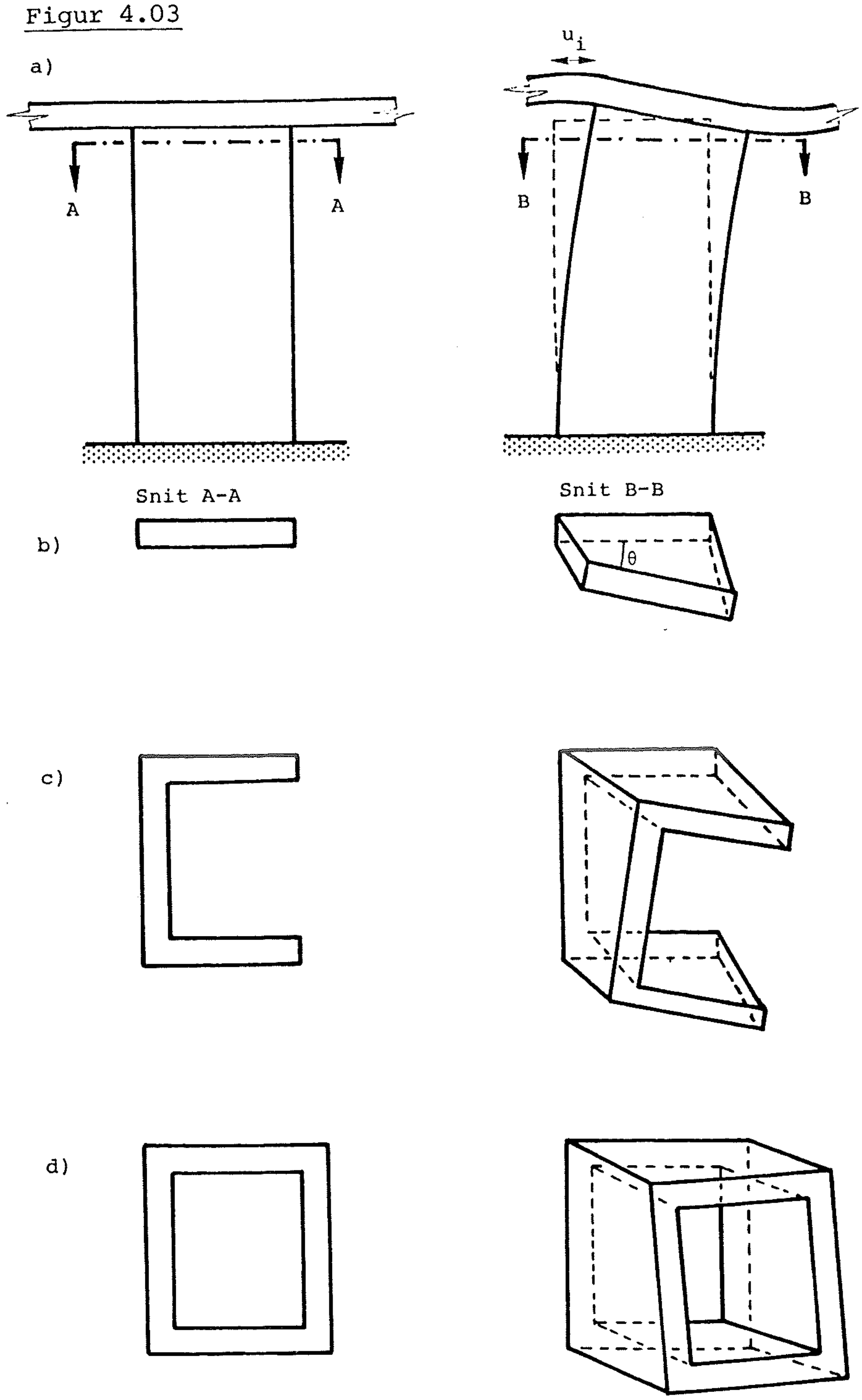
Da der er tale om små flytninger er $\theta \ll 1$, d.v.s. $\cos\theta \cong 1$ og $\sin\theta \cong \theta$.

Indsættes dette i (4.02) og (4.01) fås:

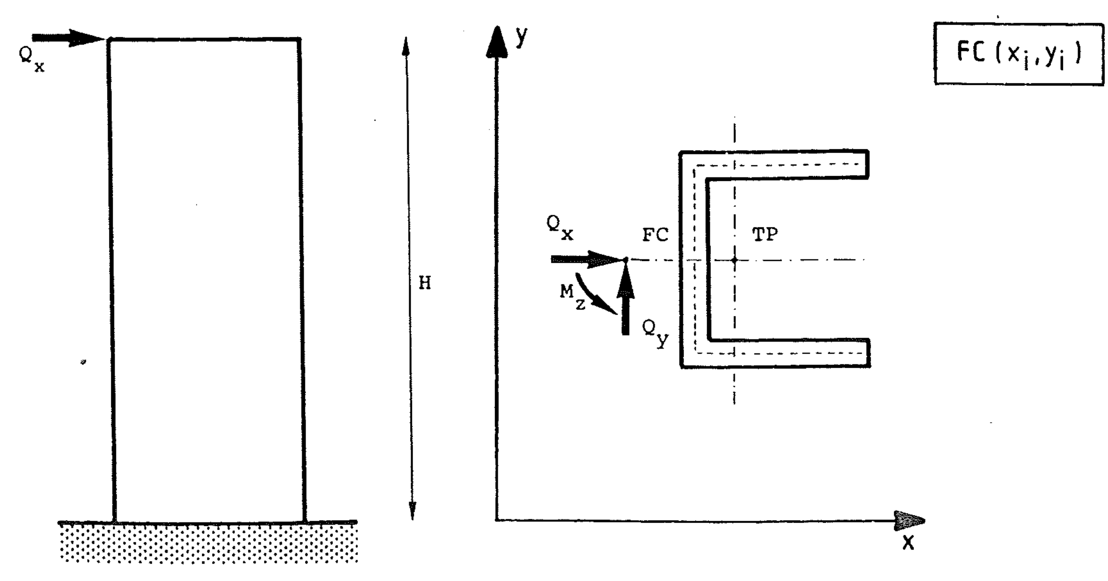
$$\boxed{\begin{aligned} u_i &= u_F - (y_i - y_F)\,\theta \\ v_i &= v_F + (x_i - x_F)\,\theta \end{aligned}} \qquad (4.03)$$

Flytningerne af de enkelte punkter i dækskiven og dermed også i væggenes overkanter kan alstå beskrives ved punkternes koordinater (x_i, y_i) og de ubekendte u_F, v_F og θ.

Figur 4.03



Figur 4.04



Vægskivernes stivheder

Betragtes nu de vægge, hvis øverste rand tvinges til at følge dækskivernes flytning, f.eks. som vist på figur 4.03, så påvirkes de af dækskiven med kræfter (lig snitkræfterne i dæk-væg-samlingen) hvis størrelse kan beregnes ud fra de påtvungne flytningers størrelse.

Ved denne beregning kan der gøres forskellige antagelser om vægskivernes statiske virkemåde. Den mest almindelige antagelse er, at vægskiverne kan beregnes som bjælker, der er fast indspændte i fundamentet.

Plane vægge regnes uendelig slappe på tværs af deres plan.

Vægprofil

Findes der en lodret samling mellem to eller flere vægskiver, der ikke står i samme lodrette plan, betragtes de under et som en bjælke med tyndfliget profil (se figur 4.03 c og d).

For yderligere at forenkle beregningerne ses der som regel bort fra bjælkernes vridningsstivheder, men for at kunne vurdere denne forenklings tilladelighed, ses der i første omgang ikke bort fra en mulig vridningsstivhed.

Vægsnittets forskydningscentrum FC_i

Punktet FC_i med koordinaterne x_i, y_i er tværsnittets såkaldte forskydningscentrum, der defineres som det punkt, igennem hvilket en ydre vandret kraft skal angribe, for at profilet ikke skal vride sig. Omvendt gælder, at påvirkes et profil med et vridende moment, da vil der ingen udbøjning finde sted i forskydningscentret.

På figur 4.05 er angivet placeringen af forskydningscentret for en række profiler.

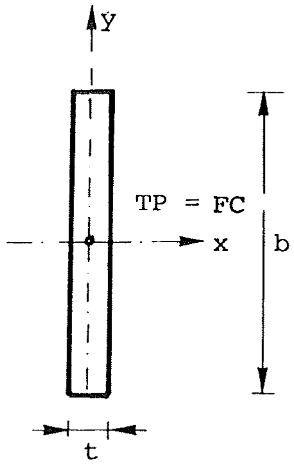
Stivhedsbestemmelse

Der betragtes en udkraget bjælke med tyndfliget profil, hvis hovedakser er parallelle med x- og y-aksen (se figur 4.04). Udbøjningen (u_i, v_i) af punktet FC_i med koordinaterne x_i, y_i og profilets drejningsvinkel θ om dette punkt kan skrives som

$$\boxed{\begin{aligned} u_i &= \frac{Q_x}{3}\frac{H^3}{EI_y} + \kappa\frac{Q_x H}{G A_{kx}} \\ v_i &= \frac{Q_y}{3}\frac{H^3}{EI_x} + \kappa\frac{Q_y H}{G A_{ky}} \\ \theta &= \frac{M_z}{GI_v} H \end{aligned}} \qquad (4.04)$$

hvor Q_x, Q_y og M_z er den vandrette krafts resultant i punkt FC_i. I_x og I_y er inertimomenterne om x- og y-akserne gennem tvær-

Figur 4.05



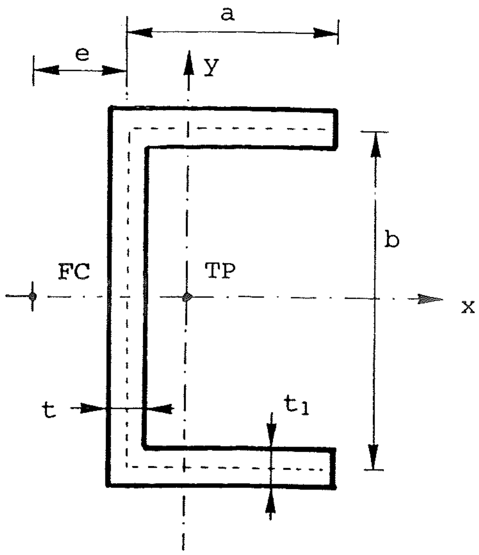
$$I_x = \frac{1}{12}\, b^3\, t$$

$$I_y = \frac{1}{12}\, b\, t^3$$

$$I_v = \frac{1}{3}\, b\, t^3 \quad \text{forudsat } t \ll b$$

TP : Tyngdepunktet

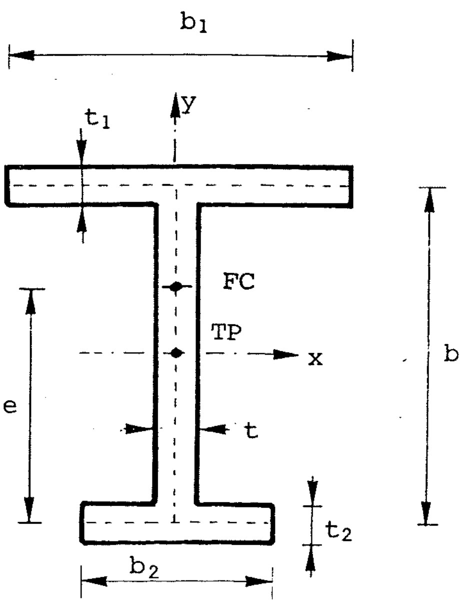
FC : Forskydningscentret



$$I_x = \frac{1}{12} b^3\, t + \frac{1}{2} b^2\, a\, t_1$$

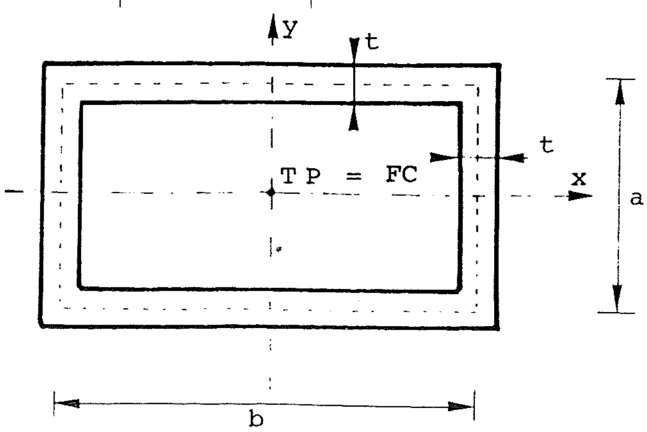
$$e = \frac{a^2\, t_1}{2\, a t_1 + \frac{1}{3} b\, t} = \frac{a^2\, b^2\, t_1}{4\, I_x}$$

$$I_v = \frac{1}{3} b\, t^3 + \frac{2}{3} a\, t_1^3$$



$$e = b\, \frac{t_1\, b_1^3}{t_1\, b_1^3 + t_2\, b_2^3}$$

$$I_v = \frac{1}{3}\;\; b\, t^3 + b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3)$$



$$I_v = \frac{2(ab)^2\, t}{a+b}$$

snittets tyngdepunkt, medens I_v er vridningsinertimomentet, E er elasticitetsmodulen og G forskydningselasticitetsmodulen. A_{kx} og A_{ky} er tværsnittets kropareal i henholds x-retningen og y-retningen. κ er en tværsnitsafhængig konstant.

I almindelighed ses ved bjælker bort fra udbøjningsbidraget fra forskydningsspændingerne, idet bjælkehøjden forudsættes at være meget mindre end spændvidden.

Idet, der her ses bort fra forskydningsspændingernes bidrag, fås

$$\boxed{\begin{aligned} u_i &= \frac{Q_x}{3}\,\frac{H^3}{EI_y} \\ v_i &= \frac{Q_y}{3}\,\frac{H^3}{EI_x} \\ \theta &= \frac{M_z}{GI_v}\,H \end{aligned}} \tag{4.05}$$

Omvendt fås

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x &= \frac{3\,EI_y}{H^3}\,u_i \\ Q_y &= \frac{3\,EI_x}{H^3}\,v_i \\ M_z &= \frac{G\,I_v}{H}\,\theta \end{aligned}} \tag{4.06}$$

hvoraf snitkræfterne mellem den betragtede væg og dækskiven kan bestemmes, hvis dækskivens flytning kendes.

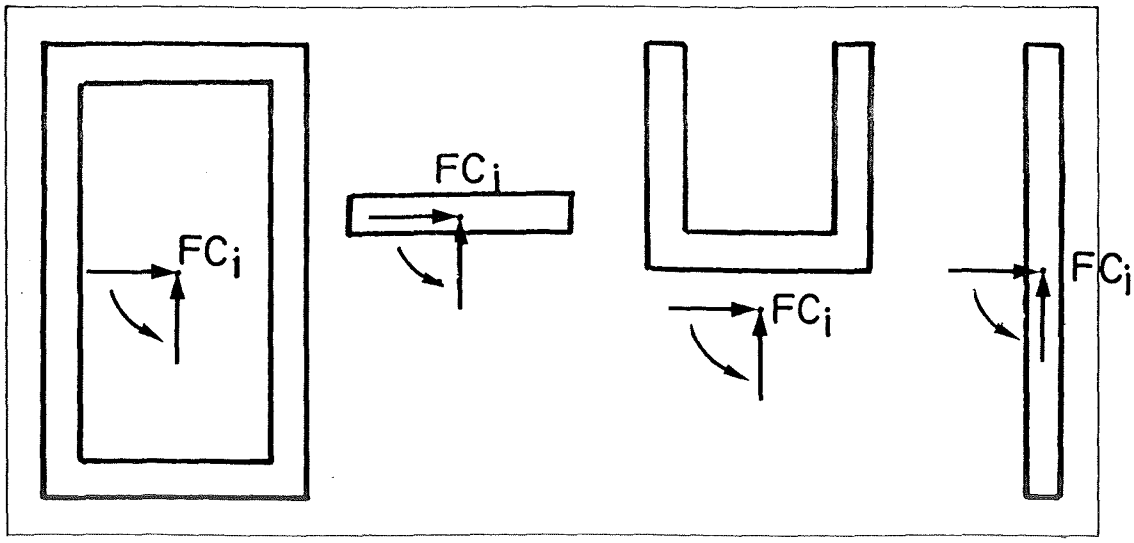
Generelt kan (4.04) skrives

$$\boxed{\begin{aligned} u_i &= \frac{Q_x^i}{C_i^x} \\ v_i &= \frac{Q_y^i}{C_i^y} \\ \theta &= \frac{M_z^i}{C_i^z} \end{aligned}} \tag{4.07}$$

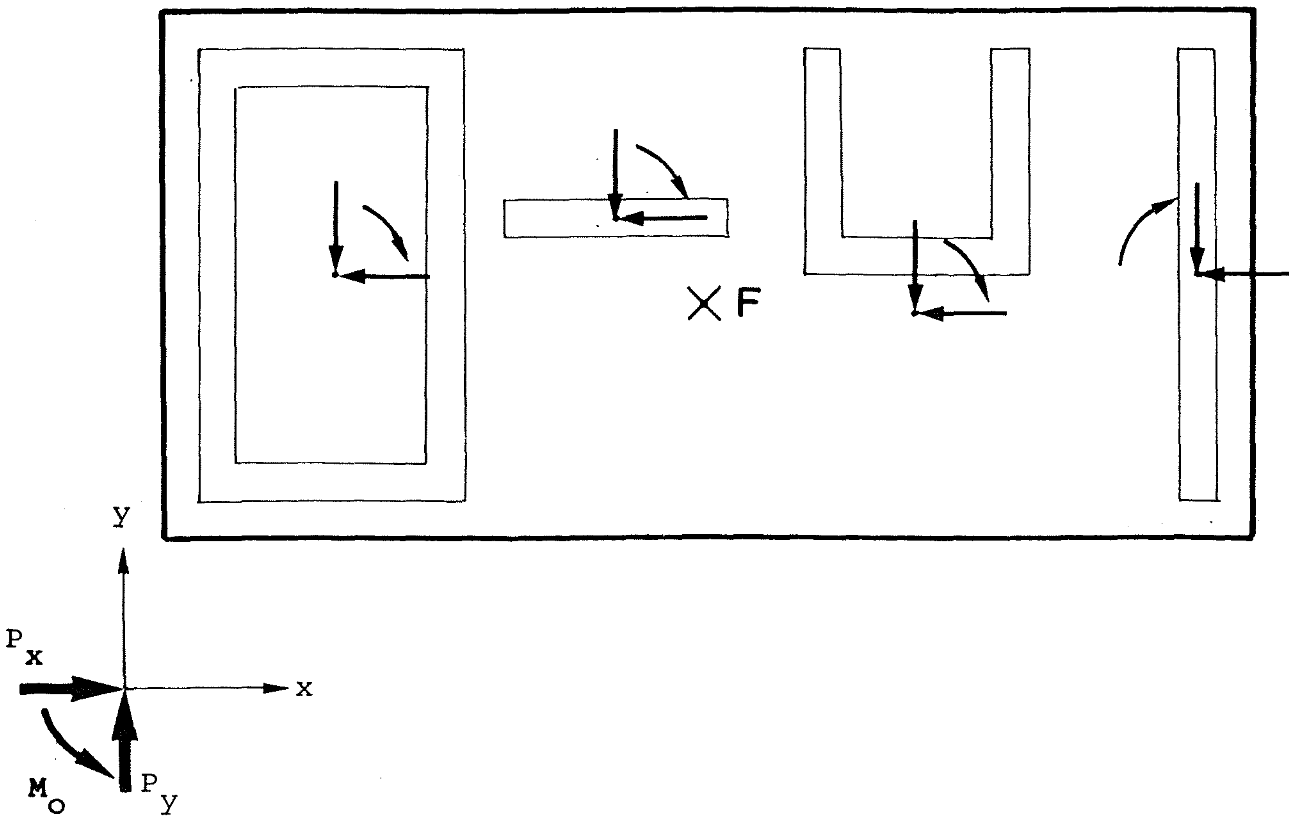
113

Figur 4.06

a) Snitkræfterne virkende på væg-bjælkerne



b) Snitkræfterne virkende på dækskiven



Note: I almindelighed regnes <u>ikke</u> med

a) at plane vægge optager kræfter på tværs af deres plan

b) at plane vægge eller åbne, tyndfligede profiler optager vridende momenter.

eller omvendt

(4.08)

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x^i &= C_i^x \cdot u_i \\ Q_y^i &= C_i^y \cdot v_i \\ M_z^i &= C_i^z \cdot \theta \end{aligned}}$$

hvor C_i^x, C_i^y og C_i^z betegner stivhederne for væggen med nummeret i.

Idet, der ses bort fra forskydningernes bidrag, fås af (4.05) og (4.08)

(4.09)

$$\boxed{\begin{aligned} C_i^x &= \frac{3EI_y}{H^3} \\ C_i^y &= \frac{3EI_x}{H^3} \\ C_i^z &= \frac{GI_v}{H} \end{aligned}}$$

Med (4.08) og (4.09) er der opnået et udtryk for de snitkræfter, der påvirker dækskiven, og som skal holde ligevægt med den ydre belastning på dækket.

Ligevægtsligninger

> Den ydre belastning regnes positiv i x- og y-aksernes positive retninger.

Regnes snitkræfterne på dækket (se figur 4.06 b) positive i de negative akseretninger, og har den ydre belastning resultanten P_x, P_y og M_o i koordinatsystemets begyndelsespunkt, giver de statiske ligevægtsbetingelser

(4.10)

$$\boxed{\begin{aligned} P_x &= \sum_{i=1}^{n} Q_x^i \\ P_y &= \sum_{i=1}^{n} Q_y^i \\ M_o &= \sum_{i=1}^{n} [M_z^i + x_i\, Q_y^i - y_i\, Q_x^i] \end{aligned}}$$

Hvor n er antallet af vægge.

(114)

Indsættes (4.03) i (4.08) og denne i (4.10) fås

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} C_i^x \; [u_F - (y_i - y_F)\theta\,]$$

$$= u_F \sum_{i=1}^{n} C_i^x - \theta \sum_{i=1}^{n} C_i^x\,(y_i - y_F)$$

$$P_y = \sum_{i=1}^{n} C_i^y \,[v_F + (x_i - x_F)\theta\,]$$

$$= v_F \sum_{i=1}^{n} C_i^y + \theta \sum_{i=1}^{n} C_i^y\,(x_i - x_F)$$

For at lette beregningerne vælges koordinaterne (x_F, y_F) således, at de sidste summationer bliver lig nul, d.v.s.

(4.11)

$$\boxed{\begin{aligned} x_F &= \frac{\Sigma C_i^y\, x_i}{\Sigma C_i^y} \\ y_F &= \frac{\Sigma C_i^x\, y_i}{\Sigma C_i^x} \end{aligned}}$$

Forskydningscentrum F for vægsystem

Punktet F med koordinater x_F, y_F bestemt af (4.11) kaldes vægsystemets forskydningscentrum.

Hvis vægsystemet er symmetrisk, vil F ligge på symmetrilinien.

Med dette valg af x_F og y_F fås altså:

(4.12)

$$\boxed{\begin{aligned} u_F &= \frac{P_x}{\Sigma C_i^x} \\ v_F &= \frac{P_y}{\Sigma C_i^y} \end{aligned}}$$

d.v.s., at dækskivens translation nu er bestemt. - Sagt i ord:

Vægsystemets forskydningscentrum F vil i akseretningerne få flytninger, der er lig med belastningens komposant, divideret med den samlede stivhed i den pågældende retning.

u_F og v_F er flytningerne af vægsystemets forskydningscentrum F. x_F og y_F er koordinaterne til vægsystemets forskydningscentrum F. x_i og y_i er koordinaterne til den enkelte vægs forskydningscentrum FC_i.

(115)

Momentligevægten giver, idet (4.03) indsættes i (4.08) og denne i (4.10):

$$M = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \theta\, C_i^z + x_i\, C_i^y [v_F + (x_i - x_F)\theta] - y_i\, C_i^x [u_F - (y_i - y_F)\theta] \Big\}$$

$$= \theta \sum_{i=1}^{n} C_i^z + v_F \sum_{i=1}^{n} C_i^y x_i + \theta \sum_{i=1}^{n} C_i^y (x_i - x_F)^2$$

$$+ x_F\, \theta \sum_{i=1}^{n} C_i^y (x_i - x_F)$$

$$- u_F \sum_{i=1}^{n} C_i^x y_i + \theta \sum_{i=1}^{n} C_i^x (y_i - y_F)^2$$

$$+ y_F\, \theta \sum_{i=1}^{n} C_i^x (y_i - y_F)$$

Vægsystemets vridningsstivhed

Udnyttes (4.11) og (4.12) og indføres betegnelsen:

$$\boxed{C_{zF} = \sum_{i=1}^{n} [C_i^x (y_i - y_F)^2 + C_i^y (x_i - x_F)^2] + \sum_{i=1}^{n} C_i^z} \qquad (4.13)$$

kan momentet om begyndelsespunktet skrives som:

$$M_o = x_F P_y - y_F P_x + \theta\, C_{zF} \qquad (4.14)$$

Da den ydre belastnings moment M_F om forskydningscentret F med koordinaterne x_F og y_F, kan skrives:

$$M_F = M_o - x_F P_y + y_F P_x \qquad (4.15)$$

(se f.eks. figur 4.06 b), fås så af (4.14):

$$M_F = \theta\, C_{zF}$$

C_{zF} betegner vægsystemets vridningsstivhed, og dækskivens drejning θ ses således at være proportional med de ydre kræfters moment om F, og kan bestemmes af:

$$\boxed{\theta = \frac{M_F}{C_{zF}}} \qquad (4.16)$$

Hvis belastningsresultanten går igennem forskydningscentret F, ses dækskiven ingen drejning at få.

(116)

Til bestemmelse af de søgte snitkræfter mellem vægge og dækskive fås ved indsættelse af (4.16) og (4.12) i (4.03), som derefter indsættes i (4.08), følgende:

(4.17-ny)

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x^i &= C_i^x \cdot \frac{P_x}{\Sigma C_i^x} - C_i^x \cdot (y_i - y_F) \frac{M_F}{C_{zF}} \\ Q_y^i &= C_i^y \cdot \frac{P_y}{\Sigma C_i^y} + C_i^y \cdot (x_i - x_F) \frac{M_F}{C_{zF}} \\ M_z^i &= C_i^z \frac{M_F}{C_{zF}} \end{aligned}}$$

Forskydnings- og drejningsbidrag

Snitkræfterne ses at være summen af to led; det første kaldes "forskydningsbidraget" (det hidrører fra dækskivens translation (forskydning) i kraftretningen); det andet kaldes "drejningsbidraget" (det hidrører fra dækskivens drejning som følge af M_F).

Forskydningsbidraget er en fordeling af den ydre last i en given retning - til væggene i denne retning i forhold til deres stivheder; og hvis stivhederne kan beregnes af de tilnærmede udtryk (4.09), er stivhederne C_i^x og C_i^y proportionale med inertimomenterne I_y henh. I_x.

Drejningsbidraget optræder, når resultanten af den ydre belastning ikke går gennem punkt F (vægsystemets forskydningscentrum).

Den ydre belastning

P_x og P_y er komposanter i henholdsvis x-aksens retning og y-aksens retning af den ydre belastning, regnet positiv i aksernes positive retninger.

M_F er momentet om pkt. F af den ydre belastning, regnet positiv "mod uret" (svarende til den positive omløbsretning i xy-koordinatsystemet).
M_F kan findes ved direkte betragtning af den ydre belastning i relation til pkt. F; eller - hvis den ydre belastnings moment M_O om koordinatsystemets nulpunkt er kendt - af (4.15).

Referencestivhed C_o og dimensionsløse relative stivheder α

I formlerne (4.17-ny) for snitkræfterne, er det forholdet mellem den enkelte vægs stivhed og en sum af stivheder, der indgår.
Man kan derfor benytte relative stivheder α for væggene i stedet for de absolutte C, hvilket beregningsmæssigt kan være en fordel.

Eksempelvis kan en bestemt væg udnævnes til referencevæg. Stivhederne af de andre vægge ud- trykkes så i forhold til stivheden af denne væg, referencestivheden C_o, ved hjælp af relative stivheder α_i:

(4.18-ny)

$$\boxed{\begin{aligned} C^x_i &= \alpha^x_i \cdot C_o \\ C^y_i &= \alpha^y_i \cdot C_o \\ C^z_i &= \alpha^z_i \cdot H^2 \cdot C_o \end{aligned}}$$

Den relative stivhed α udtrykker, hvor mange gange stivere en væg er i forhold til en bestemt væg med stivheden C_o.

Referencestivheden C_o behøver ikke at være knyttet til en forekommende væg. Der kan vælges en hvilken som helst C_o, der gør tallene for de relative stivheder α_i bekvemme at arbejde med.

For vridningsstivheden C^z_i gælder, at der er en dimensionsforskel på C^z_i og C^x_i (C^y_i) (jf. (4.09)) på "en længde i anden".

Vi får for de samlede stivheder:

(4.19-ny)

$$\boxed{\begin{aligned} &\Sigma C^x_i = C_o \cdot \Sigma\alpha^x_i \\ &\Sigma C^y_i = C_o \cdot \Sigma\alpha^y_i \\ &\text{og} \\ &C_{zF} = C_o \cdot (\Sigma[\alpha^x_i \cdot (y_i - y_F)^2] + \Sigma[\alpha^y_i \cdot (x_i - x_F)^2] \\ &\qquad + H^2 \cdot \Sigma\alpha^z_i) \end{aligned}}$$

Formlerne (4.17-ny) kommer med relative stivheder til at se sådan ud

$$
(4.20\text{-ny})\qquad
\boxed{
\begin{aligned}
Q^i_x &= \alpha^x_i \cdot \frac{P_x}{\Sigma\alpha^x_i} - \alpha^x_i \cdot (y_i - y_F) \cdot \frac{M_F}{C_{zF}/C_o} \\
Q^i_y &= \alpha^y_i \cdot \frac{P_y}{\Sigma\alpha^y_i} + \alpha^y_i \cdot (x_i - x_F) \cdot \frac{M_F}{C_{zF}/C_o} \\
M^i_z &= \alpha^z_i \cdot H^2 \cdot \frac{M_F}{C_{zF}/C_o}
\end{aligned}
}
$$

Beregningsgang

1. Koordinatsystemet x,y fastlægges.

2. De enkelte vægges (vægprofilers) stivheder α^x_i, α^y_i og (i givet fald) α^z_i findes ud fra inertimomenterne I^i_y, I^i_x og (i givet fald) I^i_v.

   Der kan ofte med fordel benyttes et skema som vist i de efterfølgende eksempler (skema I).

   Herefter beregnes:

3. Vægsystemets samlede stivheder (for ialt n vægge)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^x_i \qquad \text{og} \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha^y_i$$

4. Forskydningscentret F´s koordinater

$$x_F = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\alpha^y_i \cdot x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha^y_i} \qquad y_F = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\alpha^x_i \cdot y_i)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha^x_i}$$

   Der kan ofte med fordel benyttes et skema som vist i de efterfølgende eksempler (skema II).

(119)

5. Vridningsstivheden for vægsystemet

$$C_{zF}/C_o = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^x \cdot (y_i - y_F)^2)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^y \cdot (x_i - x_F)^2)$$

$$+ H^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^z$$

Der kan ofte med fordel benyttes et skema som vist i de efterfølgende eksempler (skema III).

6. Den ydre belastnings komposanter P_x og P_y samt momentet M_F af den ydre belastning om punkt F.

   M_F kan enten beregnes direkte ud fra den ydre belastning eller - hvis M_O kendes - af (4.15).

7. Snitkræfterne Q_x^i og Q_y^i samt (i givet fald) M_z^i

$$Q_x^i = \alpha_i^x \cdot \frac{P_x}{\Sigma\alpha_i^x} - \alpha_i^x \cdot (y_i - y_F) \cdot \frac{M_F}{C_{zF}/C_o}$$

$$Q_y^i = \alpha_i^y \cdot \frac{P_y}{\Sigma\alpha_i^y} + \alpha_i^y \cdot (x_i - x_F) \cdot \frac{M_F}{C_{zF}/C_o}$$

$$M_z^i = \alpha_i^z \cdot H^2 \cdot \frac{M_F}{C_{zF}/C_o}$$

Benyttes

$$Qf_x^i = \alpha_i^x \cdot \frac{P_x}{\Sigma\alpha_i^x}$$

$$Qf_y^i = \alpha_i^y \cdot \frac{P_y}{\Sigma\alpha_i^y}$$

$$Qd_x^i = -\alpha_i^x \cdot (y_i - y_F) \cdot \frac{M_F}{C_{zF}/C_o}$$

$$Qd_y^i = +\alpha_i^y \cdot (x_i - x_F) \cdot \frac{M_F}{C_{zF}/C_o}$$

(120)

kan formlerne for snitkræfterne Q_x^i og Q_y^i skrives

$$Q_x^i = Qf_x^i + Qd_x^i$$

$$Q_y^i = Qf_y^i + Qd_y^i$$

Der kan ofte med fordel benyttes et skema som vist i de følgende eksempler (skema IV).

8. Når de søgte snitkræfter er fundet, bør man vurdere dem og kontrollere dem i den udstrækning, det er muligt.

   Stemmer de statiske ligevægtsligninger (4.10)?

   Er der - fejlagtigt - fundet kræfter på tværs af plane vægge?

   Hvis $M_F = 0$ og $P_X = 0$, er der da kun fundet kræfter i væggene i y-retningen?

   Hvis $M_F = 0$ og $P_y = 0$, er der da kun fundet kræfter i væggene i x-retningen?

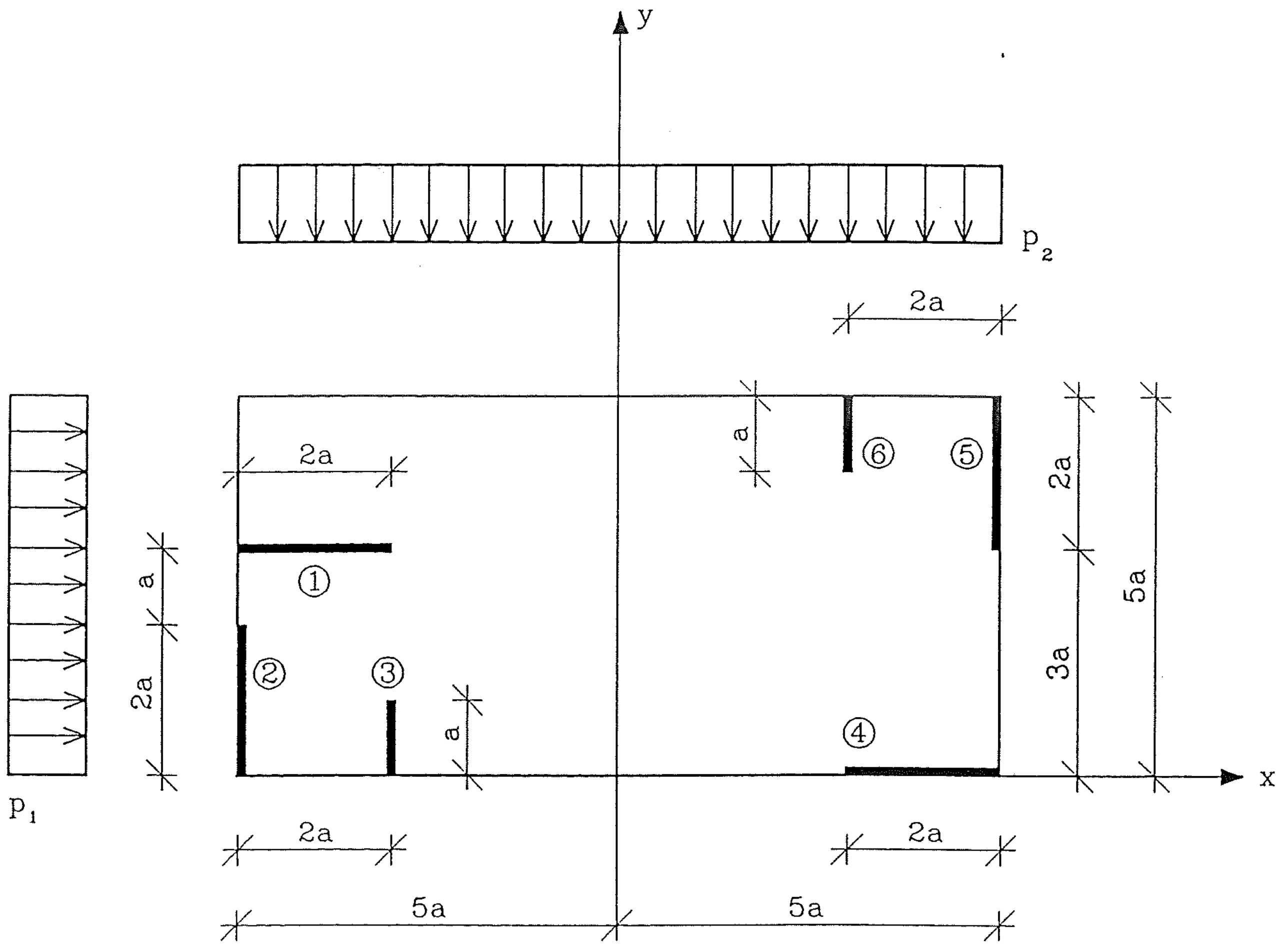
   Hvis $M_F = 0$, er kræfterne da proportionale med stivhederne?

(121)

Eksempel 4.1-ny.

I en skivebygning med plane vægge som vist på figur 4.1-ny, skal snitkræfterne mellem dækskiven og væggene beregnes dels for den viste linielast p_1, og dels for den viste linielast p_2.

Figur 4.1-ny.



Vægtykkelse t

1. Koordinatsystemets placering er vist på figuren.

2. Referencestivheden C_0 vælges til stivheden af væg 1 med længden 2 a og inertimomentet 1/12 · t · (2 a)³.

$$C_o = \frac{3 \cdot E \cdot I_{1,y}}{H^3}$$

Vi har altså $\alpha_1^x = 1$

$\alpha_i^x = I_{i,y}/I_{1,y}$ $\qquad$ $\alpha_i^y = I_{i,x}/I_{1,y}$

alle $\alpha_i^z = 0$

Skema I.

i	I_y	α_i^x	I_x	α_i^y
1	$1/12 \cdot t \cdot (2\ a)^3$	1		0
2		0	$1/12 \cdot t \cdot (2\ a)^3$	1
3		0	$1/12 \cdot t \cdot a^3$	0,125
4	$1/12 \cdot t \cdot (2\ a)^3$	1		0
5		0	$1/12 \cdot t \cdot (2\ a)^3$	1
6		0	$1/12 \cdot t \cdot a^3$	0,125
Sum		2		2,250

3. Vægsystemets samlede stivheder:

$\Sigma\alpha_i^x = 2 \qquad \Sigma\alpha_i^y = 2,25$

4. Forskydningscentret F´s koordinater.

Skema II.

i	α_i^x	y_i	$\alpha_i^x \cdot y_i$	α_i^y	x_i	$\alpha_i^y \cdot x_i$
1	1	3,00·a	3,00·a	0	-4,00·a	0,000·a
2	0	1,00·a	0,00·a	1	-5,00·a	-5,000·a
3	0	0,50·a	0,00·a	0,125	-3,00·a	-0,375·a
4	1	0,00·a	0,00·a	0	4,00·a	0,000·a
5	0	4,00·a	0,00·a	1	5,00·a	5,000·a
6	0	4,50·a	0,00·a	0,125	3,00·a	0,375·a
Sum	2		3,00·a	2,250		0

$x_F = 0 \qquad y_F = \frac{3,00 \cdot a}{2} = 1,50 \cdot a$

5. Vridningsstivheden for vægsystemet.

Skema III.

i	α_i^x	$y_i - y_F$	$\alpha_i^x \cdot (y_i - y_F)^2$	α_i^y	$x_i - x_F$	$\alpha_i^y \cdot (x_i - x_F)^2$
1	1	1,50·a	2,250·a²	0	-4,00·a	0,000·a²
2	0	-0,50·a	0,000·a²	1	-5,00·a	25,000·a²
3	0	-1,00·a	0,000·a²	0,125	-3,00·a	1,125·a²
4	1	-1,50·a	2,250·a²	0	4,00·a	0,000·a²
5	0	2,50·a	0,000·a²	1	5,00·a	25,000·a²
6	0	3,00·a	0,000·a²	0,125	3,00·a	1,125·a²
Sum			4,500·a²			52,250·a²

$C_{zF}/C_o = 4,50 \cdot a^2 + 52,25 \cdot a^2 = 56,75 \cdot a^2$

(123)

Belastning p_1

6. $P_x = p_1 \cdot 5a$

   $P_y = 0$

   $M_F = p_1 \cdot 5a \cdot (2,5 \cdot a - 1,5 \cdot a) \cdot (-1) = -5 \cdot p_1 \cdot a$

7. Snitkræfter.

Skema IV. for belastning p_1.

i	Qf^i_x	Qd^i_x	Q^i_x	Qf^i_y	Qd^i_y	Q^i_y
1	$2,50 \cdot p_1 \cdot a$	$0,13 \cdot p_1 \cdot a$	$2,63 \cdot p_1 \cdot a$	0	0	0
2	0	0	0	0	$0,44 \cdot p_1 \cdot a$	$0,44 \cdot p_1 \cdot a$
3	0	0	0	0	$0,03 \cdot p_1 \cdot a$	$0,03 \cdot p_1 \cdot a$
4	$2,50 \cdot p_1 \cdot a$	$-0,13 \cdot p_1 \cdot a$	$2,37 \cdot p_1 \cdot a$	0	0	0
5	0	0	0	0	$-0,44 \cdot p_1 \cdot a$	$-0,44 \cdot p_1 \cdot a$
6	0	0	0	0	$-0,03 \cdot p_1 \cdot a$	$-0,03 \cdot p_1 \cdot a$

Belastning p_2

6. $P_x = 0$

   $P_y = p_2 \cdot 10a \cdot (-1) = -10 \cdot p_2 \cdot a$

   $M_F = 0$

7. Snitkræfter.

Skema IV. for belastning p_2.

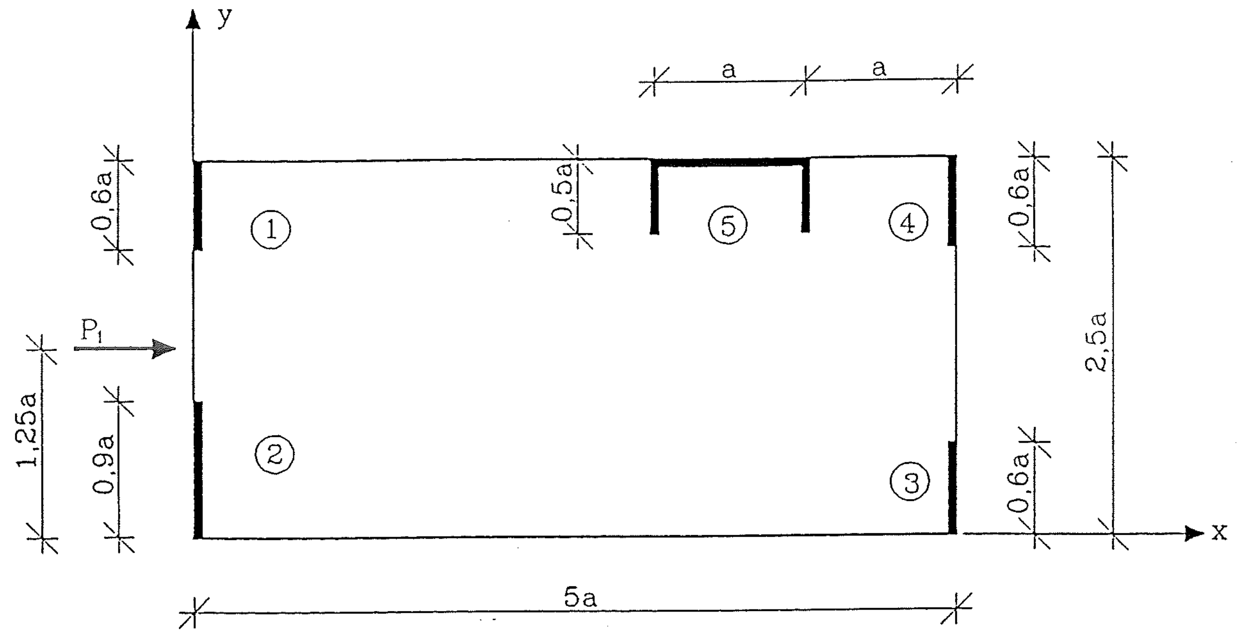
i	Qf^i_x	Qd^i_x	Q^i_x	Qf^i_y	Qd^i_y	Q^i_y
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	$-4,44 \cdot p_2 \cdot a$	0	$-4,44 \cdot p_2 \cdot a$
3	0	0	0	$-0,56 \cdot p_2 \cdot a$	0	$-0,56 \cdot p_2 \cdot a$
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	$-4,44 \cdot p_2 \cdot a$	0	$-4,44 \cdot p_2 \cdot a$
6	0	0	0	$-0,56 \cdot p_2 \cdot a$	0	$-0,56 \cdot p_2 \cdot a$

(124)

Eksempel 4.2-ny.

I en skivebygning med vægge som vist på figur 4.2-ny, skal snitkræfterne mellem dækskiven og væggene beregnes for den viste last P_1.
Bemærk væg 5, der er et U-profil.

Figur 4.2-ny.



Vægtykkelse t

1. Koordinatsystemets placering er vist på figuren.

2. Referencestivheden C_o vælges til stivheden af væg 1 med længden 0,6·a og inertimomentet $1/12 \cdot t \cdot (o,6 \cdot a)^3 = 0{,}0180 \cdot t \cdot a^3$.

$$C_o = \frac{3 \cdot E \cdot I_{1,x}}{H^3}$$

$$\alpha_1^y = 1$$

$$\alpha_i^x = I_{i,y}/I_{1,x} \qquad \alpha_i^y = I_{i,x}/I_{1,x}$$

alle $\alpha_i^z = 0$

Væg 2

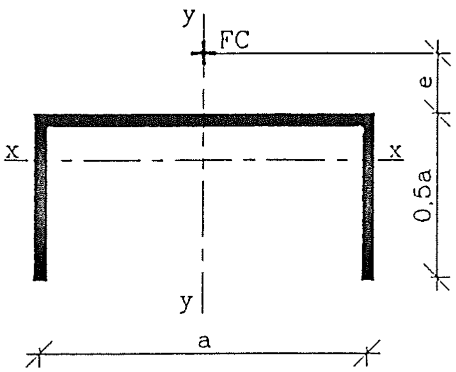
$$I_x = 1/12 \cdot t \cdot (0{,}9 \cdot a)^3 = 0{,}06075 \cdot t \cdot a^3$$

$$\alpha_2^y = 0{,}06075/0{,}0180 = 3{,}375$$

125

Væg 5

U-tværsnit



Af Appendix 1 fås

$e = 0,375 \cdot (0,5 \cdot a) = 0,1875 \cdot a$

$I_y = 0,3333 \cdot t \cdot a^3$

$I_x = 0,05208 \cdot t \cdot a^3$

$y_5 = 2,5 \cdot a + 0,1875 \cdot a = 2,69 \cdot a$

$\alpha_5^x = 0,3333/0,0180 = 18,52$

$\alpha_5^y = 0,05208/0,0180 = 2,893$

Skema I.

i	$I_y/(t \cdot a^3)$	α_i^x	$I_x/(t \cdot a^3)$	α_i^y
1		0	0,0180	1
2		0	0,06075	3,375
3		0	0,0180	1
4		0	0,0180	1
5	0,3333	18,52	0,05208	2,893
Sum		18,52		9,268

3. Vægsystemets samlede stivheder.

$\Sigma\alpha_i^x = 18,52$ $\Sigma\alpha_i^y = 9,268$

(126)

4. Forskydningscentret F´s koordinater.

Skema II.

i	α^x_i	y_i	$\alpha^x_i \cdot y_i$	α^y_i	x_i	$\alpha^y_i \cdot x_i$
1	0	2,20·a	0,00·a	1,000	0,00·a	0,00·a
2	0	0,30·a	0,00·a	3,375	0,00·a	0,00·a
3	0	0,45·a	0,00·a	1,000	5,00·a	5,00·a
4	0	2,20·a	0,00·a	1,000	5,00·a	5,00·a
5	18,52	2,69·a	49,77·a	2,893	3,50·a	10,13·a
Sum	18,52		49,77·a	9,268		20,13·a

$$x_F = \frac{20{,}13 \cdot a}{9{,}27} = 2{,}17 \cdot a$$

$$y_F = \frac{49{,}77 \cdot a}{18{,}52} = 2{,}69 \cdot a$$

5. Vridningsstivheden for vægsystemet.

Skema III.

i	α^x_i	$y_i - y_F$	$\alpha^x_i \cdot (y_i - y_F)^2$	α^y_i	$x_i - x_F$	$\alpha^y_i \cdot (x_i - x_F)^2$
1	0,000	-0,49·a	0	1,000	-2,17·a	4,715·a²
2	0,000	-2,39·a	0	3,375	-2,17·a	15,915·a²
3	0,000	-2,24·a	0	1,000	2,83·a	8,000·a²
4	0,000	-0,49·a	0	1,000	2,83·a	8,000·a²
5	18,520	0,00·a	0	2,893	1,33·a	5,106·a²
Sum			0			41,740·a²

$$C_{zF}/C_o = 0 + 41{,}74 \cdot a^2 = 41{,}74 \cdot a^2$$

6. $P_x = P_1$

$p_y = 0$

$M_F = P_1 \ (2{,}69 \cdot a - 1{,}25 \cdot a) = + 1{,}44 \cdot P_1 \cdot a$

7. Snitkræfter.

Skema IV.

i	Qf^i_x	Qd^i_x	Q^i_x	Qf^i_y	Qd^i_y	Q^i_y
1	0	0	0	0	-0,08·P₁	-0,08·P₁
2	0	0	0	0	-0,25·P₁	-0,25·P₁
3	0	0	0	0	0,10·P₁	0,10·P₁
4	0	0	0	0	0,10·P₁	0,10·P₁
5	1·P₁	0	1·P₁	0	0,13·P₁	0,13·P₁

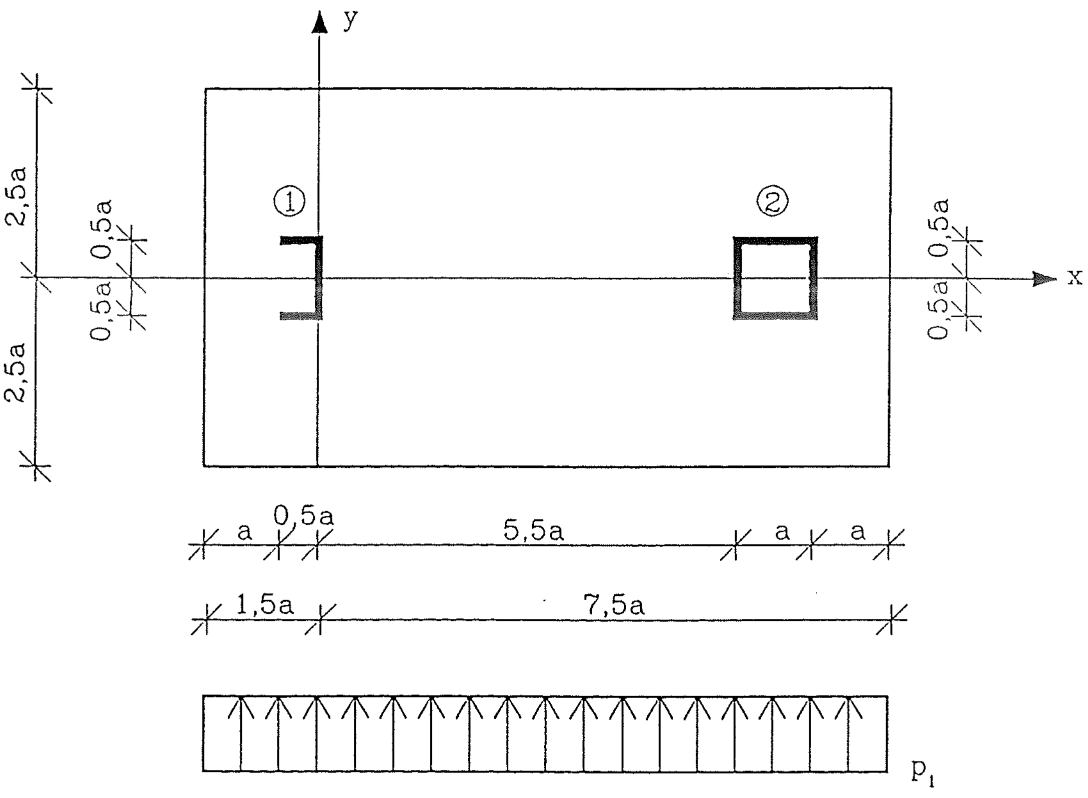
(127)

Eksempel 4.3-ny.

I en skivebygning med vægge som vist på figur 4.3-ny skal snitkræfterne mellem dækskiven og væggene beregnes for den viste linielast p_l.

Bemærk væg 2, der er et kasseprofil, der har $\alpha_i^z \neq 0$.

Figur 4.3-ny.



Vægtykkelse t

Dækskivens højde over fundament, H = 4·a

1. koordinatsystemets placering er vist på figuren.

2. Referencestivheden C_o vælges til

$$C_o = 3 \cdot \frac{E \cdot t \cdot a^3}{H^3}$$

(svarende til stivheden af en væg med tykkelsen t og længden $\sqrt[3]{12} \cdot a$. - Der forekommer ikke en sådan væg i bygningen.)

$\alpha_i^x = I_{i,y}/(t \cdot a^3)$ $\qquad$ $\alpha_i^y = I_{i,x}/(t \cdot a^3)$

Stivhed $\alpha_i^z = \dfrac{G \cdot I_{i,v}}{H} \cdot \dfrac{1}{C_o} \cdot \dfrac{1}{H^2}$

(128)

Væg 1
U-tværsnit

Af appendix 1 fås for væg 1

$$e = 0{,}375 \cdot (0{,}5 \cdot a) = 0{,}1875 \cdot a$$
$$I_y = 0{,}05208 \cdot t \cdot a^3$$
$$I_x = 0{,}3333 \cdot t\, a^3$$

Væg 2
Kasseprofil

$$I_x = I_y = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot t \cdot a^3 + 2 \cdot t \cdot a \cdot (a/2)^2$$
$$= 0{,}6666 \cdot t \cdot a^3$$

Af fig. 4.05 fås

$$I_v = \frac{2 \cdot (a \cdot a)^2 \cdot t}{a + a} = 1 \cdot t \cdot a^3$$

Idet G/E regnes til 0,4 (for beton) fås

$$\alpha_2^z = \frac{G \cdot 1 \cdot t \cdot a^3}{H} \cdot \frac{H^3}{3 \cdot E \cdot t \cdot a^3} \cdot \frac{1}{H^2} = 0{,}1333$$

Skema I.

i	$I_y/(t \cdot a^3)$	α_i^x	$I_x/(t \cdot a^3)$	α_i^y	α_i^z
1	0,05208	0,0521	0,3333	0,3333	0
2	0,6666	0,6666	0,6666	0,6666	0,1333
Sum		0,7187		1,000	0,1333

3. Vægsystemets samlede stivheder.

$\Sigma\alpha_i^x = 0{,}719$ $\Sigma\alpha_i^y = 1{,}000$ $\Sigma\alpha_i^z = 0{,}1333$

4. Forskydningscentret F´s koordinater.

Skema II.

i	α_i^x	y_i	$\alpha_i^x \cdot y_i$	α_i^y	x_i	$\alpha_i^y \cdot x_i$
1	0,0521	0	0	0,3333	0,1875·a	0,062·a
2	0,6666	0	0	0,6666	6,0000·a	4,000·a
Sum	0,7187		0	1,000		4,062·a

$$x_F = \frac{4{,}062 \cdot a}{1{,}000} = 4{,}06 \cdot a$$

$$y_F = 0$$

5. Vridningsstivheden for vægsystemet.

Skema III.

i	α^x_i	$y_i - y_F$	$\alpha^x_i \cdot (y_i - y_F)^2$	α^y_i	$x_i - x_F$	$\alpha^y_i \cdot (x_i - x_F)^2$	$\alpha^z_i \cdot H^2$
1	0,0521	0	0	0,3333	$-3{,}88 \cdot a$	$5{,}005 \cdot a^2$	0
2	0,6666	0	0	0,6666	$1{,}94 \cdot a$	$2{,}502 \cdot a^2$	$0{,}1333 \cdot (4a)^2$
Sum			0			$7{,}507 \cdot a^2$	$2{,}133 \cdot a^2$

$$C_{zF}/C_o = 0 + 7{,}507 \cdot a^2 + 2{,}133 \cdot a^2 = 9{,}64 \cdot a^2$$

6. $P_x = 0$

$$P_y = p_1 \cdot 9 \cdot a$$

$$M_F = (p_1 \cdot 9 \cdot a) \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot a - 1{,}5 \cdot a - 4{,}06 \cdot a) = -9{,}56 \cdot p_1 \cdot a^2$$

7. Snitkræfter.

Skema IV.

i	Qf^i_x	Qd^i_x	Q^i_x	Qf^i_y	Qd^i_y	Q^i_y	M^i_z
1	0	0	0	$3{,}00 \cdot p_1 \cdot a$	$1{,}28 \cdot p_1 \cdot a$	$4{,}28 \cdot p_1 \cdot a$	0
2	0	0	0	$6{,}00 \cdot p_1 \cdot a$	$-1{,}28 \cdot p_1 \cdot a$	$4{,}72 \cdot p_1 \cdot a$	$-2{,}12 \cdot p_1 \cdot a^2$

$$(M^2_z = 2{,}133 \cdot a^2 \cdot \frac{-9{,}56 \cdot p_1 \cdot a^2}{9{,}64 \cdot a^2} = -2{,}116 \cdot p_1 \cdot a^2)$$

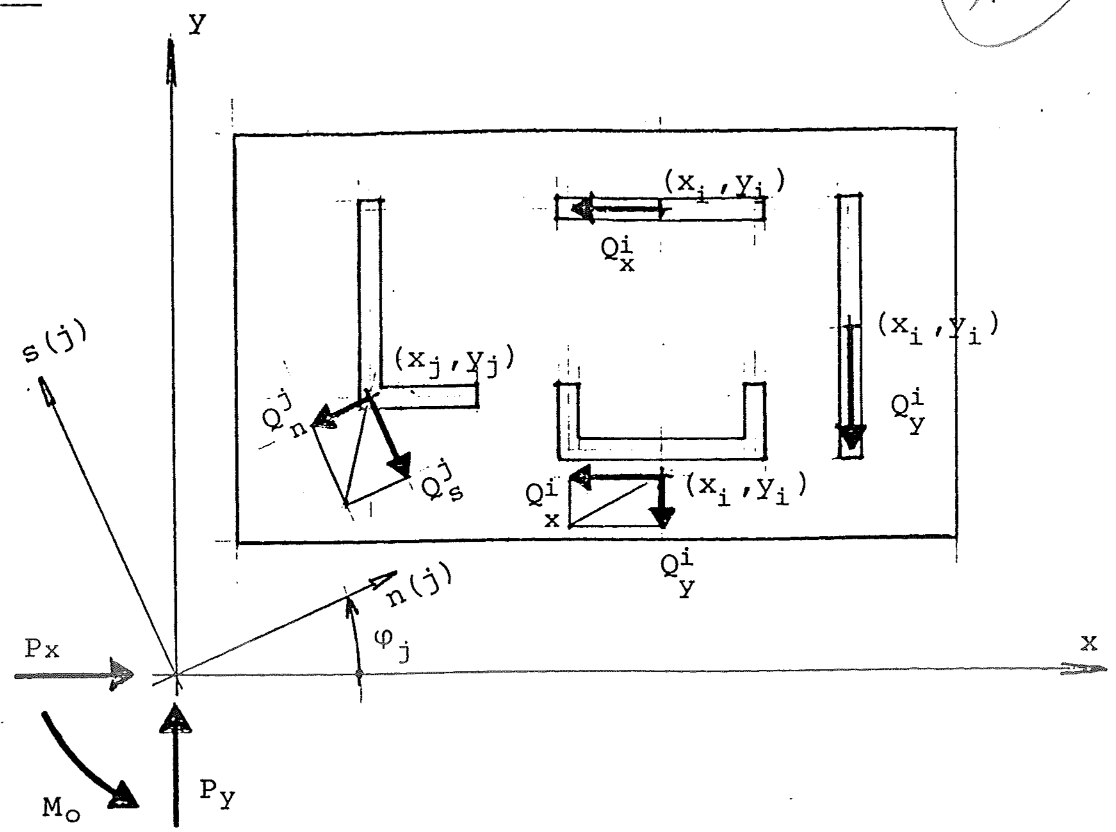
4.4 Dækskivefordelingsmetoden for vægge og vægprofiler med vilkårligt beliggende hovedakser

I det foregående er det forudsat, at væggene eller vægprofilerne har tværsnit, hvis hovedakser er parallelle med akserne i det indlagte x-y koordinatsystem.

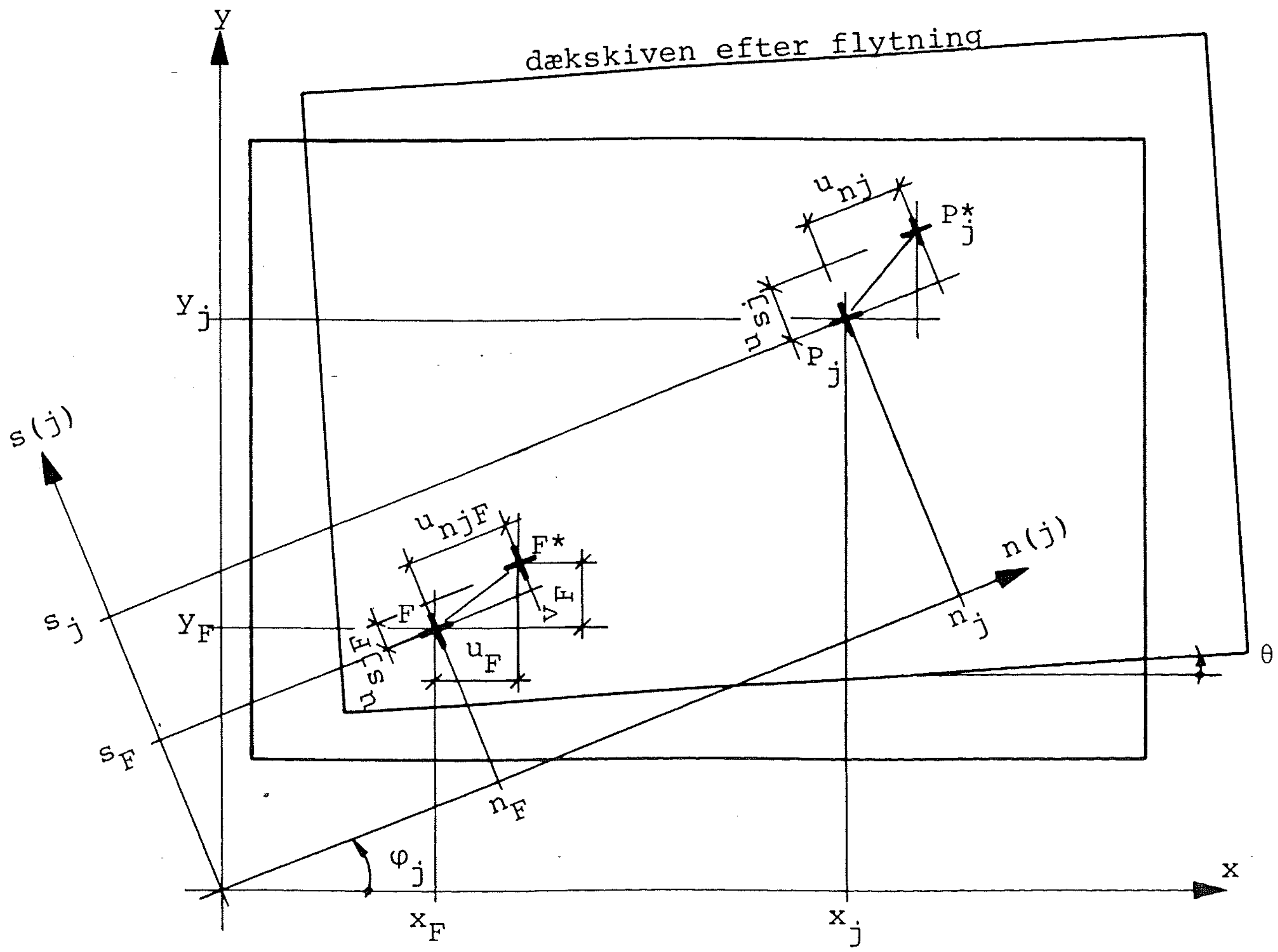
I det følgende opstilles formler til beregning af fordelingen af vandret last til et vægsystem, der også har vægge (vægprofiler), hvis hovedakser ikke er parallelle med x- og y-aksen.

Det forudsættes her, at man kan se bort fra vridningsstivheden af det enkelte vægprofil (og den enkelte væg).

Figur 4.09



Figur 4.10



(130)

(i)

Vi betragter et vægsystem, der indeholder

1) plane vægge parallelle med x- og y-aksen eller vægprofiler med hovedakser i x- og y-retningen med stivhederne C^i_x og C^i_y i henholdsvis x- og y-retningen
- kan overføre snitkræfterne (for vægprofiler: komposanterne) Q^i_x og Q^i_y i henholdsvis x- og y-retningen,

(j)

2) vægprofiler med hovedakser i n(j)- og s(j)-retningen eller plane vægge i n(j)- og s(j)-retningen med stivhederne C^j_n og C^j_s i hovedretningerne
- kan overføre snitkræfterne (for vægprofiler: komposanterne) Q^j_n og Q^j_s i henholdsvis n(j)- og s(j)-retningen.

φ_j angiver den vinkel n(j)-aksen er drejet (positiv mod uret) i forhold til x-aksen.

Husk at (x_i, y_i) henholdsvis (x_j, y_j) er væggens forskydningscentrum FC_i henholdsvis FC_j

For hvert vægprofil (j) indlægges et n(j)-s(j) koordinatsystem med φ_j afhængig af tværsnittets hovedretninger. - Tværsnittets 1. eller 2. hovedakse kan frit vælges som n(j)-akseretning.

Se figur 4.09.

På figuren er det snitkræfterne på dækskiven, der er vist (positive i de negative akseretninger).

På figuren er der også angivet den ydre belastnings resultant P_x, P_y og M_O (positive som vist) i x-y koordinatsystemets 0-punkt.

Vægsystemets forskydningscentrum F har koordinaterne (x_F, y_F).

Geometriske betingelser

For dækskivens flytning gælder formel (4.03), som her benyttes for væg (i)

$$\boxed{\begin{aligned} u_i &= u_F - (y_i - y_F)\cdot\theta \\ v_i &= v_F + (x_i - x_F)\cdot\theta \end{aligned}} \qquad (4.21)$$

samt for vægprofil (j) med hovedakser i retningerne n(j)-s(j)

$$\boxed{\begin{aligned} u_{nj} &= u_{njF} - (s_j - s_F)\cdot\theta \\ u_{sj} &= u_{sjF} + (n_j - n_F)\cdot\theta \end{aligned}} \qquad (4.22)$$

- fås ved bogstavombytning.

Se iøvrigt figur 4.10. $\theta \ll 1$.

(132)

Der gælder følgende sammenhæng imellem afstande og flytninger i forskellige koordinatsystemer

(4.23)
$$\boxed{\begin{aligned} n_j - n_F &= (x_j - x_F)\cdot\cos\varphi_j + (y_j - y_F)\cdot\sin\varphi_j \\ s_j - s_F &= (y_j - y_F)\cdot\cos\varphi_j - (x_j - x_F)\cdot\sin\varphi_j \end{aligned}}$$

(4.24)
$$\boxed{\begin{aligned} u_{njF} &= u_F\cdot\cos\varphi_j + v_F\cdot\sin\varphi_j \\ u_{sjF} &= v_F\cdot\cos\varphi_j - u_F\cdot\sin\varphi_j \end{aligned}}$$

- fås umiddelbart, jfr. figur 4.10.

Fysiske betingelser

For en plan væg (i) i x- eller y-retningen eller et profil (i) med hovedakser i retningerne x-y gælder, jfr. (4.08),

(4.25)
$$\boxed{\begin{aligned} Q_x^i &= C_x^i \cdot u_i \\ Q_y^i &= C_y^i \cdot v_i \end{aligned}}$$
$(C_z^i = 0)$

For et vægprofil (j) med hovedakser i retningerne n(j)-s(j) gælder analogt

(4.26)
$$\boxed{\begin{aligned} Q_n^j &= C_n^j \cdot u_{nj} \\ Q_s^j &= C_s^j \cdot u_{sj} \end{aligned}}$$
$(C_z^j = 0)$

Statiske betingelser

Ligevægtsligningerne for dækskiven giver

- se figur 4.09.

(4.27)
$$\boxed{\begin{aligned} P_x &= \Sigma Q_x^i + \Sigma(Q_n^j\cdot\cos\varphi_j - Q_s^j\cdot\sin\varphi_j) \\ P_y &= \Sigma Q_y^i + \Sigma(Q_s^j\cdot\cos\varphi_j + Q_n^j\cdot\sin\varphi_j) \\ M_o &= \Sigma(x_i\cdot Q_y^i - y_i\cdot Q_x^i) + \Sigma(n_j\cdot Q_s^j - s_j\cdot Q_n^j) \\ (M_z^i &= 0, \quad M_z^j = 0) \end{aligned}}$$

- der summeres over alle vægge (i) og alle vægge (j).

Analogt med udledningen i afsnit 4.3 kan disse ligninger løses med hensyn til de enkelte snitkræfter mellem vægge og dækskive, ved brug af hjælpestørrelserne x_F og y_F og vægsystemets vridningsstivhed. Se figur 4.11.

Figur 4.11

Udledning af formlerne til bestemmelse af de enkelte snitkræfter mellem vægge og dækskive.

Af (4.27) med (4.25) og (4.26) samt (4.21), (4.22), (4.23) og (4.24) indsat fås

$$
\begin{aligned}
P_x = {} & \Sigma C_x^i \cdot u_i \\
& +\Sigma (C_n^j \cdot u_{nj} \cdot \cos\varphi - C_s^i \cdot u_{sj} \cdot \sin\varphi_j) \\
= {} & \Sigma C_x^i \cdot (u_F - (y_i - y_F) \cdot \theta) \\
& +\Sigma (C_n^j \cdot (u_F \cdot \cos\varphi_j + v_F \cdot \sin\varphi_j \\
& \qquad -((y_j - y_F) \cdot \cos\varphi_j - (x_j - x_F) \cdot \sin\varphi_j) \cdot \theta) \cdot \cos\varphi_j \\
& \quad -C_s^j \cdot (v_F \cdot \cos\varphi_j - u_F \cdot \sin\varphi_j \\
& \qquad +((x_j - x_F) \cdot \cos\varphi_j + (y_j - y_F) \cdot \sin\varphi_j) \cdot \theta) \cdot \sin\varphi_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_y = {} & \Sigma C_y^i \cdot v_i \\
& +\Sigma (C_s^j \cdot u_{sj} \cdot \cos\varphi_j + C_n^j \cdot u_{nj} \cdot \sin\varphi_j) \\
= {} & \Sigma C_y^i \cdot (v_F + (x_i - x_F) \cdot \theta) \\
& +\Sigma (C_s^j \cdot (v_F \cdot \cos\varphi_j - u_F \cdot \sin\varphi_j \\
& \qquad +((x_j - x_F) \cdot \cos\varphi_j + (y_j - y_F) \cdot \sin\varphi_j) \cdot \theta) \cdot \cos\varphi_j \\
& \quad +C_n^j \cdot (u_F \cdot \cos\varphi_j + v_F \cdot \sin\varphi_j \\
& \qquad -((y_j - y_F) \cdot \cos\varphi_j - (x_j - x_F) \cdot \sin\varphi_j) \cdot \theta) \cdot \sin\varphi_j
\end{aligned}
$$

eller - ordnet i led, der indeholder θ, og i led, der ikke indeholder θ -

$$
\begin{aligned}
P_x = {} & u_F \cdot (\Sigma C_x^i + \Sigma (C_n^j \cdot \cos^2\varphi_j + C_s^j \cdot \sin^2\varphi_j)) \\
& +v_F \cdot \Sigma (C_n^j \cdot \sin\varphi_j \cdot \cos\varphi_j - C_s^j \cdot \sin\varphi_j \cdot \cos\varphi_j) \\
& +\theta \cdot \Big[-\Sigma (y_i - y_F) \cdot C_x^i - \Sigma (y_j - y_F) \cdot (C_n^j \cdot \cos^2\varphi_j + C_s^j \cdot \sin^2\varphi_j) \\
& \qquad +\Sigma (x_j - x_F) \cdot (C_n^j - C_s^j) \cdot \sin\varphi_j \cdot \cos\varphi_j \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_y = {} & v_F \cdot (\Sigma C_y^i + \Sigma (C_s^j \cdot \cos^2\varphi_j + C_n^j \cdot \sin^2\varphi_j)) \\
& +u_F \cdot \Sigma (C_n^j \cdot \sin\varphi_j \cdot \cos\varphi_j - C_s^j \cdot \sin\varphi_j \cdot \cos\varphi_j) \\
& +\theta \cdot \Big[\Sigma (x_i - x_F) \cdot C_y^i + \Sigma (x_j - x_F) \cdot (C_s^j \cdot \cos^2\varphi_j + C_n^j \cdot \sin^2\varphi_j) \\
& \qquad -\Sigma (y_j - y_F) \cdot (C_n^j - C_s^j) \cdot \sin\varphi_j \cdot \cos\varphi_j \Big]
\end{aligned}
$$

I hver af ligningerne sættes de kantede paranteser [ ] lig nul, hvilket giver to ligninger med to ubekendte til bestemmelse af koordinaterne (x_F, y_F) til vægsystemets forskydningscentrum F, og to ligninger med to ubekendte til bestemmelse af dækskivens translation u_F og v_F.

Figur 4.11 - fortsat

Idet vi sætter

$$A_1 = \Sigma(C_n^j \cdot \cos^2\varphi_j + C_s^j \cdot \sin^2\varphi_j) + \Sigma C_x^i$$

$$A_2 = \Sigma(C_s^j \cdot \cos^2\varphi_j + C_n^j \cdot \sin^2\varphi_j) + \Sigma C_y^i$$

$$A_3 = \Sigma(C_n^j - C_s^j) \cdot \sin\varphi_j \cdot \cos\varphi_j$$

$$B_1 = \Sigma(y_j \cdot (C_n^j \cdot \cos^2\varphi_j + C_s^j \cdot \sin^2\varphi_j) - x_j \cdot (C_n^j - C_s^j) \cdot \sin\varphi_j \cdot \cos\varphi_j) + \Sigma y_i \cdot C_x^i$$

$$B_2 = \Sigma(x_j \cdot (C_s^j \cdot \cos^2\varphi_j + C_n^j \cdot \sin^2\varphi_j) - y_j \cdot (C_n^j - C_s^j) \cdot \sin\varphi_j \cdot \cos\varphi_j) + \Sigma x_i \cdot C_y^i$$

$$D = A_1 \cdot A_2 - A_3^2$$

fås

$$-A_3 \cdot x_F + A_1 \cdot y_F - B_1 = 0$$

$$-A_2 \cdot x_F + A_3 \cdot y_F + B_2 = 0$$

der har løsningen

$$x_F = \frac{A_1 \cdot B_2 + B_1 \cdot A_3}{D}$$

$$y_F = \frac{A_2 \cdot B_1 + B_2 \cdot A_3}{D}$$

og

$$A_1 \cdot u_F + A_3 \cdot v_F = P_x$$

$$A_3 \cdot u_F + A_2 \cdot v_F = P_y$$

der har løsningen

$$u_F = \frac{P_x \cdot A_2 - P_y \cdot A_3}{D}$$

$$v_F = \frac{P_y \cdot A_1 - P_x \cdot A_3}{D}$$

I afsnit 4.3 er opstillet formel (4.13) til beregning af vægsystemets vridningsstivhed C_{zF}.

Sagt generelt udregnes vridningsstivheden som produktsummen af væggenes stivhed i hovedretningerne og kvadratet på afstanden til forskydningscentret for vægsystemet. (Den enkelte vægs egen vridningsstivhed C_z^i henh. C_z^j regnes her lig nul). For et vægsystem, der har profiler med hovedakser i x- og y-retningen og profiler med hovedakser i n(j)- og s(j)-retningen bliver formlen for vridningsstivheden

$$C_{zF} = \Sigma(C_x^i \cdot (y_i - y_F)^2 + C_y^i \cdot (x_i - x_F)^2) + \Sigma(C_n^j \cdot (s_j - s_F)^2 + C_s^j \cdot (n_j - n_F)^2)$$

Dækskivens rotation θ beregnes - generelt - af

$$\theta = \frac{M_F}{C_{zF}}$$

hvor M_F er den ydre belastnings moment om forskydningscentret (positiv mod uret).

Snitkræfterne mellem vægge og dækskive bliver:

(4.28)

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x^i &= C_x^i \cdot [u_F - (y_i - y_F)\cdot\theta] \\ Q_y^i &= C_y^i \cdot [v_F + (x_i - x_F)\cdot\theta] \\ Q_n^j &= C_n^j \cdot [u_{njF} - (s_j - s_F)\cdot\theta] \\ Q_s^j &= C_s^j \cdot [u_{sjF} + (n_j - n_F)\cdot\theta] \end{aligned}}$$

hvor

(4.29)

$$\boxed{\begin{aligned} x_F &= \frac{A_1\cdot B_2 + B_1\cdot A_3}{D} \\ y_F &= \frac{A_2\cdot B_1 + B_2\cdot A_3}{D} \end{aligned}}$$

(4.30)

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 &= \Sigma[C_n^j\cdot\cos^2\varphi_j + C_s^j\cdot\sin^2\varphi_j] + \Sigma C_x^i \\ A_2 &= \Sigma[C_s^j\cdot\cos^2\varphi_j + C_n^j\cdot\sin^2\varphi_j] + \Sigma C_y^i \\ A_3 &= \Sigma[(C_n^j - C_s^j)\cdot\sin\varphi_j\cdot\cos\varphi_j] \\ B_1 &= \Sigma[y_j\cdot(C_n^j\cdot\cos^2\varphi_j + C_s^j\cdot\sin^2\varphi_j) \\ &\quad - x_j\cdot(C_n^j - C_s^j)\cdot\sin\varphi_j\cdot\cos\varphi_j] \\ &\quad + \Sigma y_i\cdot C_x^i \\ B_2 &= \Sigma[x_j\cdot(C_s^j\cdot\cos^2\varphi_j + C_n^j\cdot\sin^2\varphi_j) \\ &\quad - y_j\cdot(C_n^j - C_s^j)\cdot\sin\varphi_j\cdot\cos\varphi_j] \\ &\quad + \Sigma x_i\cdot C_y^i \\ D &= A_1\cdot A_2 - A_3^{\,2} \end{aligned}}$$

(136)

(4.31)

$$u_F = \frac{P_x \cdot A_2 - P_y \cdot A_3}{D}$$

$$v_F = \frac{P_y \cdot A_1 - P_x \cdot A_3}{D}$$

(4.24)

$$u_{njF} = u_F \cdot \cos\varphi_j + v_F \cdot \sin\varphi_j$$

$$u_{sjF} = v_F \cdot \cos\varphi_j - u_F \cdot \sin\varphi_j$$

(4.23)

$$n_j - n_F = (x_j - x_F) \cdot \cos\varphi_j + (y_j - y_F) \cdot \sin\varphi_j$$

$$s_j - s_F = (y_j - y_F) \cdot \cos\varphi_j - (x_j - x_F) \cdot \sin\varphi_j$$

(4.32)

$$\theta = \frac{M_F}{C_{zF}}$$

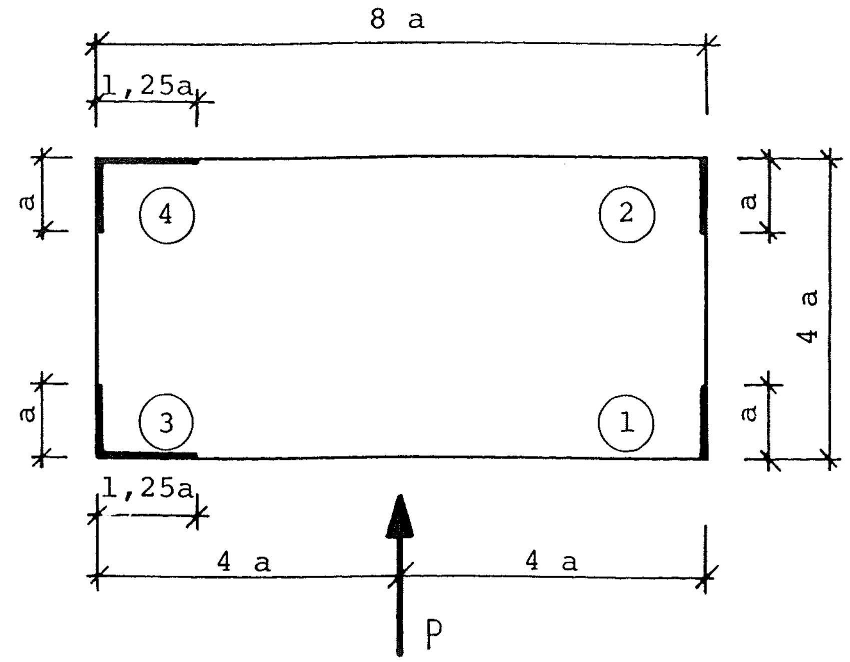
(4.33)

$$C_{zF} = \Sigma[C_x^i \cdot (y_i - y_F)^2 + C_y^i \cdot (x_i - x_F)^2] + \Sigma[C_n^j \cdot (s_j - s_F)^2 + C_s^j \cdot (n_j - n_F)^2]$$

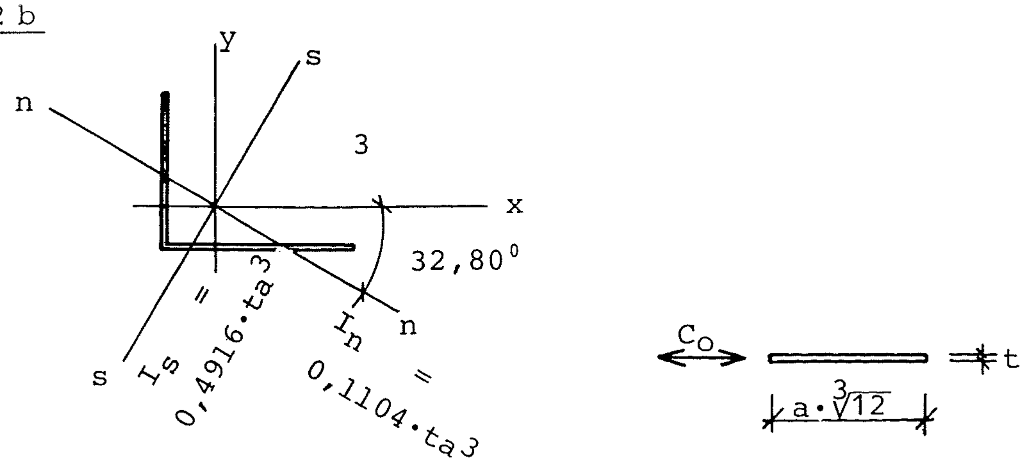
Kontrol

Ligevægtsligningerne (4.27) kan bruges til at kontrollere rigtigheden af de fundne snitkræfter.

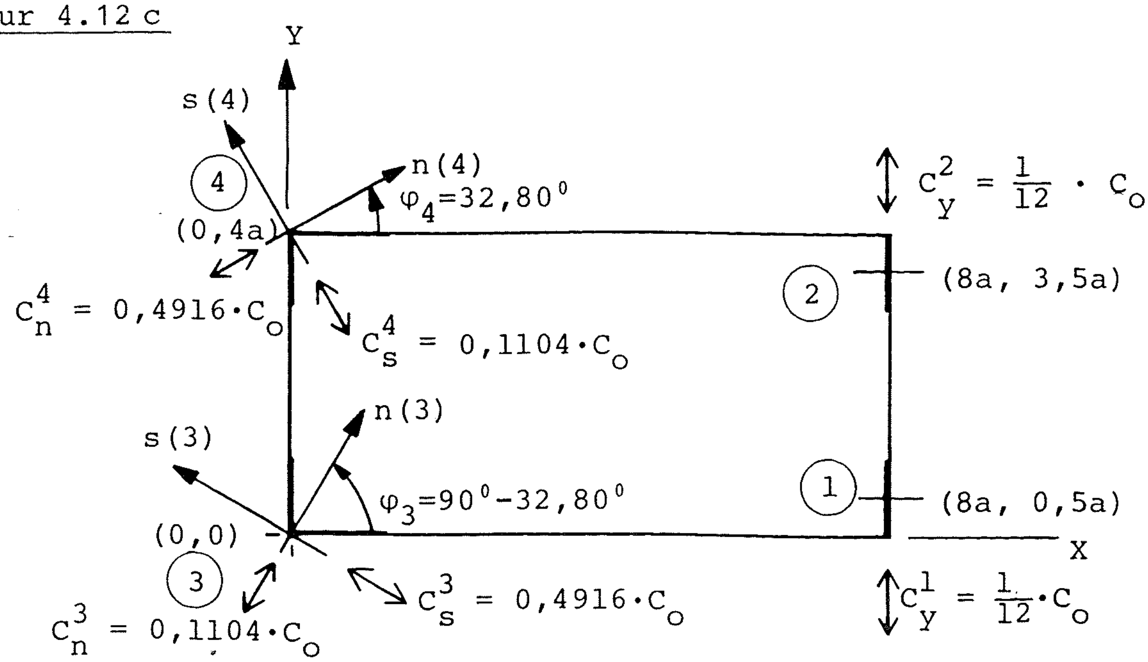
Figur 4.12 a



Figur 4.12 b



Figur 4.12 c



Eksempel 4.03

Beregn fordelingen af lasten P på væggene i en bygning med den på figur 4.12 a viste etageplan.

Dækskiven antages at være uendelig stiv i sin plan.

Væggene antages at kunne beregnes som elastiske bjælker indspændt i fundamenter. Vægtykkelse t << a. Stivheden af væggene antages at være proportional med deres inertimoment. Stivheden på tværs af de plane vægge regnes lig nul. Vridningsstivheden af den enkelte væg regnes for alle vægge lig nul.

På figur 4.12 b er for væg nr. 3 angivet hovedinertimomenterne samt hovedaksernes beliggenhed. Appendix 2 er benyttet.

På figur 4.12 c er indlagt et x-y koordinatsystem og angivet koordinaterne til de enkelte vægges forskydningscentrum. Endvidere er vist hovedakserne for væggene samt angivet stivheder i hovedakseretningerne. For væg 3's vedkommende er s'-aksen fra figur b valgt som n(3)-akse.

Belastningens resultant i koordinatsystemets 0-punkt er

$$P_x = 0$$

$$P_y = P$$

$$M_o = P \cdot 4a$$

i-væg	x_i	y_i	C_x^i	C_y^i
1	$8 \cdot a$	$0{,}5 \cdot a$	0	$0{,}0833 \cdot C_o$
2	$8 \cdot a$	$3{,}5 \cdot a$	0	$0{,}0833 \cdot C_o$

j-væg	x_j	y_j	C_n^j	C_s^j	φ_j
3	0	0	$0{,}1104 \cdot C_o$	$0{,}4916 \cdot C_o$	$57{,}20^o$
4	0	$4 \cdot a$	$0{,}4916 \cdot C_o$	$0{,}1104 \cdot C_o$	$32{,}80^o$

j-væg	$\sin\varphi_j$	$\cos\varphi_j$	$\sin^2\varphi_j$	$\cos^2\varphi_j$	$\sin\varphi_j \cdot \cos\varphi_j$
3	0,8406	0,5417	0,7066	0,2934	0,4553
4	0,5417	0,8406	0,2934	0,7066	0,4553

$$C_o = \frac{3E}{H^3} \cdot ta^3$$

(139)

Af (4.30) fås

$$A_1 = [0{,}1104 \cdot C_o \cdot 0{,}2934 + 0{,}4916 \cdot C_o \cdot 0{,}7066] \cdot 2 + 0 = \underline{0{,}7595 \cdot C_o}$$

$$A_2 = [0{,}4916 \cdot C_o \cdot 0{,}2934 + 0{,}1104 \cdot C_o \cdot 0{,}7066] \cdot 2 + (0{,}0833\ C_o) \cdot 2 = \underline{0{,}6111 \cdot C_o}$$

$$A_3 = [(0{,}1104 - 0{,}4916) \cdot C_o \cdot 0{,}4553] + [(0{,}4916 - 0{,}1104) \cdot C_o \cdot 0{,}4553] = \underline{0}$$

$$B_1 = [0] + [4a \cdot (0{,}4916 \cdot C_o \cdot 0{,}7066 + 0{,}1104 \cdot C_o \cdot 0{,}2934)] + 0 = \underline{1{,}5190 \cdot a \cdot C_o}$$

$$B_2 = [0] + [-\ 4a \cdot (0{,}4916 - 0{,}1104) \cdot C_o \cdot 0{,}4553] + (8 \cdot a \cdot 0{,}0833 \cdot C_o) \cdot 2 = \underline{0{,}6386 \cdot a \cdot C_o}$$

$$D = 0{,}7595 \cdot 0{,}6111 \cdot C_o^{\,2} - 0 = \underline{0{,}4641 \cdot C_o^{\,2}}$$

Af (4.29) fås

$$x_F = \frac{0{,}7595 \cdot C_o \cdot 0{,}6386 \cdot a \cdot C_o + 0}{0{,}4641 \cdot C_o^{\,2}} = \underline{1{,}045 \cdot a}$$

$$y_F = \frac{0{,}6111 \cdot C_o \cdot 1{,}5190 \cdot a \cdot C_o + 0}{0{,}4641 \cdot C_o^{\,2}} = \underline{2.000 \cdot a}$$

Af (4.31) fås

$$u_F = \frac{0 - 0}{D} = \underline{0}$$

$$v_F = \frac{P \cdot 0{,}7595 \cdot C_o - 0}{0{,}4641 \cdot C_o^{\,2}} = \underline{1{,}6365 \cdot \frac{P}{C_o}}$$

Af (4.24) fås

$$u_{n3F} = 0 + 1{,}6365 \cdot \frac{P}{C_o} \cdot 0{,}8406 = \underline{1{,}3756 \cdot \frac{P}{C_o}}$$

$$u_{s3F} = 1{,}6365 \cdot \frac{P}{C_o} \cdot 0{,}5417 - 0 = \underline{0{,}8865 \cdot \frac{P}{C_o}}$$

$$u_{n4F} = 0 + 1{,}6365 \cdot \frac{P}{C_o} \cdot 0{,}5417 = \underline{0{,}8865 \cdot \frac{P}{C_o}}$$

$$u_{s4F} = 1{,}6365 \cdot \frac{P}{C_o} \cdot 0{,}8406 - 0 = \underline{1{,}3756 \cdot \frac{P}{C_o}}$$

140

Afstandene fra vægsystemets forskydningscentrum er

$$x_1 - x_F = \underline{6,955 \cdot a} \qquad y_1 - y_F = -1,5 \cdot a$$

$$x_2 - x_F = \underline{6,955 \cdot a} \qquad y_2 - y_F = +1,5 \cdot a$$

$$x_3 - x_F = -1,045 \cdot a \qquad y_3 - y_F = -2,0 \cdot a$$

$$x_4 - x_F = -1,\ 45 \cdot a \qquad y_4 - y_F = +2,0 \cdot a$$

og (4.23) giver

$$n_3 - n_F = -1,045 \cdot a \cdot 0,5417 - 2,0 \cdot a \cdot 0,8406 = \underline{-2,247 \cdot a}$$

$$s_3 - s_F = -2,0 \cdot a \cdot 0,5417 + 1,045 \cdot a \cdot 0,8406 = \underline{-0,205 \cdot a}$$

$$n_4 - n_F = -1,045 \cdot a \cdot 0,8406 + 2,0 \cdot a \cdot 0,5417 = \underline{+0,205 \cdot a}$$

$$s_4 - s_F = +2,0 \cdot a \cdot 0,8406 + 1,045 \cdot a \cdot 0,5417 = \underline{+2,247 \cdot a}$$

Af (4.33) fås

$$C_{zF} = [0,0833 \cdot C_o \cdot (6,955 \cdot a)^2] \cdot 2 \qquad \text{(væg 1 og 2)}$$

$$+ [0,1104 \cdot C_o \cdot (-0,205 \cdot a)^2 + 0,4916 \cdot C_o\ (-2,247 \cdot a)^2] \qquad \text{(væg 3)}$$

$$+ [0,4916 \cdot C_o \cdot (2,247 \cdot a)^2 + 0,1104 \cdot C_o \cdot (0,205 \cdot a)^2] \qquad \text{(væg 4)}$$

$$= \underline{13,032 \cdot C_o \cdot a^2}$$

Den ydre belastnings moment om vægsystemets forskydningscentrum er

$$M_F = P \cdot (4a - 1,045 \cdot a) = \underline{2,955 \cdot P \cdot a}$$

Af (4.32) fås

$$\theta = \frac{2,955 \cdot P \cdot a}{13,032 \cdot C_o \cdot a^2} = \underline{0,2267 \cdot \frac{P}{C_o \cdot a}}$$

Fordelingen af lasten P på væggene - lig med snitkræfterne mellem vægge og dækskive - fås af (4.28)

$$Q_y^1 = 0,0833 \cdot C_o \cdot [1,6365 \cdot \frac{P}{C_o} + (6,955 \cdot a) \cdot 0,2267 \cdot \frac{P}{C_o \cdot a}] = \underline{\underline{0,268 \cdot P}}$$

$$Q_y^2 = 0,0833 \cdot C_o \cdot [1,6365 \cdot \frac{P}{C_o} + (6,955 \cdot a)\ 0,2267 \cdot \frac{P}{C_o \cdot a}] = \underline{\underline{0,268 \cdot P}}$$

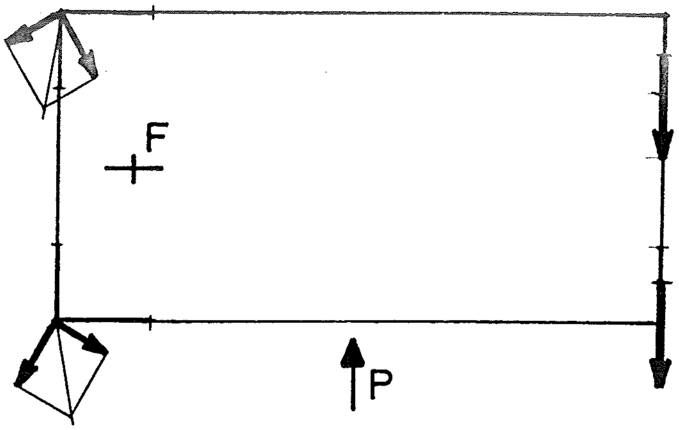
$$Q_n^3 = 0,1104 \cdot C_o \cdot [1,3756 \cdot \frac{P}{C_o} - (-\ 0,205 \cdot a) \cdot 0,2267 \cdot \frac{P}{C_o \cdot a} = \underline{\underline{0,157 \cdot P}}$$

$$Q_s^3 = 0,4916 \cdot C_o \cdot [0,8865 \cdot \frac{P}{C_o} + (-\ 2,247 \cdot a) \cdot 0,2267 \cdot \frac{P}{C_o \cdot a} = \underline{\underline{0,185 \cdot P}}$$

$$Q_n^4 = 0,4916 \cdot C_o \cdot [0,8865 \cdot \frac{P}{C_o} - (2,247 \cdot\ a) \cdot 0,2267 \cdot \frac{P}{C_o \cdot a} = \underline{\underline{0,185 \cdot P}}$$

$$Q_s^4 = 0,1104 \cdot C_o \cdot [1,3756 \cdot \frac{P}{C_o} + (0,205 \cdot a) \cdot 0,2267 \cdot \frac{P}{C_o \cdot a} = \underline{\underline{0,157 \cdot P}}$$

Skitse med snitkræfter på dækskiven



Kontrol: (4.27)

$$P_x = 0 \stackrel{?}{=} 0,157 \cdot P \cdot 0,5417 - 0,185 \cdot P \cdot 0,8406$$

$$+ 0,185 \cdot P \cdot 0,8406 - 0.157 \cdot P \cdot 0,5417 = 0$$ ok

$$P_y = P \stackrel{?}{=} 0,268 \cdot P$$

$$+ 0,268 \cdot P$$

$$+ 0,185 \cdot P \cdot 0,5417 + 0,157 \cdot P \cdot 0,8406$$

$$+ 0,157 \cdot P \cdot 0,8406 + 0,185 \cdot P \cdot 0,5417 = 1,000 \cdot P$$ ok

$$M_o = 4\,a \cdot P \stackrel{?}{=} 8\,a \cdot 0,268 \cdot P \cdot 2$$

$$+ 4\,a \cdot 0,5417 \cdot 0,157 \cdot P - 4\,a \cdot 0,8406 \cdot 0,185 \cdot P$$

$$= 4,01 \cdot P \cdot a$$ ok

142

4.5 Vægbjælkernes og dækskivernes stivheder

Som påvist i forrige kapitel giver fordelingsmetoden korrekte resultater så længe:

1) Vægbjælkernes stivheder kan fastlægges ud fra normalspændingernes deformationsbidrag beregnet efter den tekniske bjælketeori.

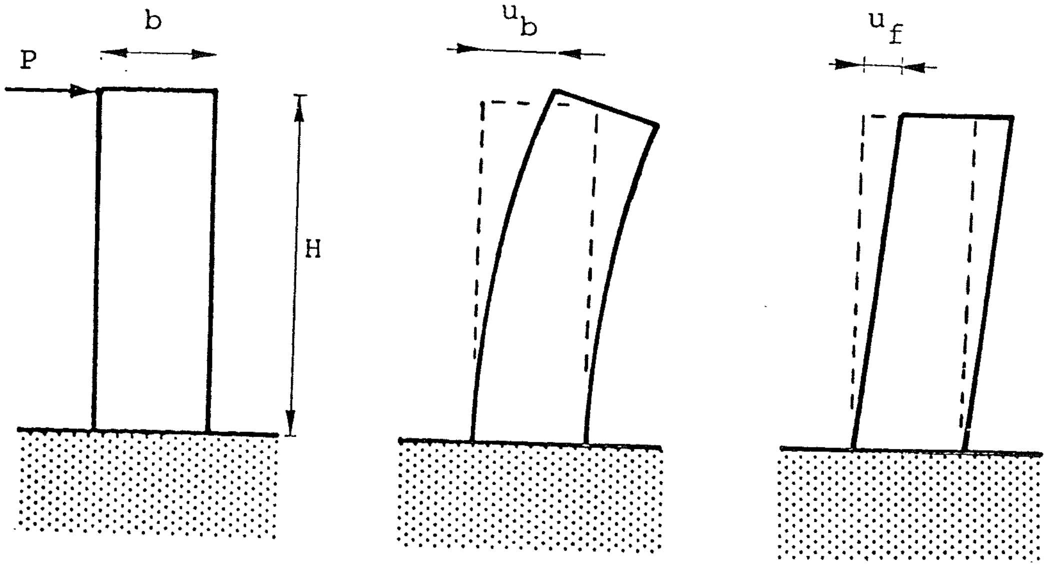
2) Dækskiverne er stive i deres plan.

3) Vægbjælkerne er vridningsslappe.

Væggene

Ved deformationsberegningen for bjælker ses der normalt bort fra forskydningsspændingernes bidrag. Fejlen, der derved begås, er, som det skal vises, uden betydning, så længe væghøjden (H) er større end 4-8 gange vægbredden (b).

Figur 4.13



For den udkragede bjælke på figur 4.13 kan toppunktets udbøjning u skrives som:

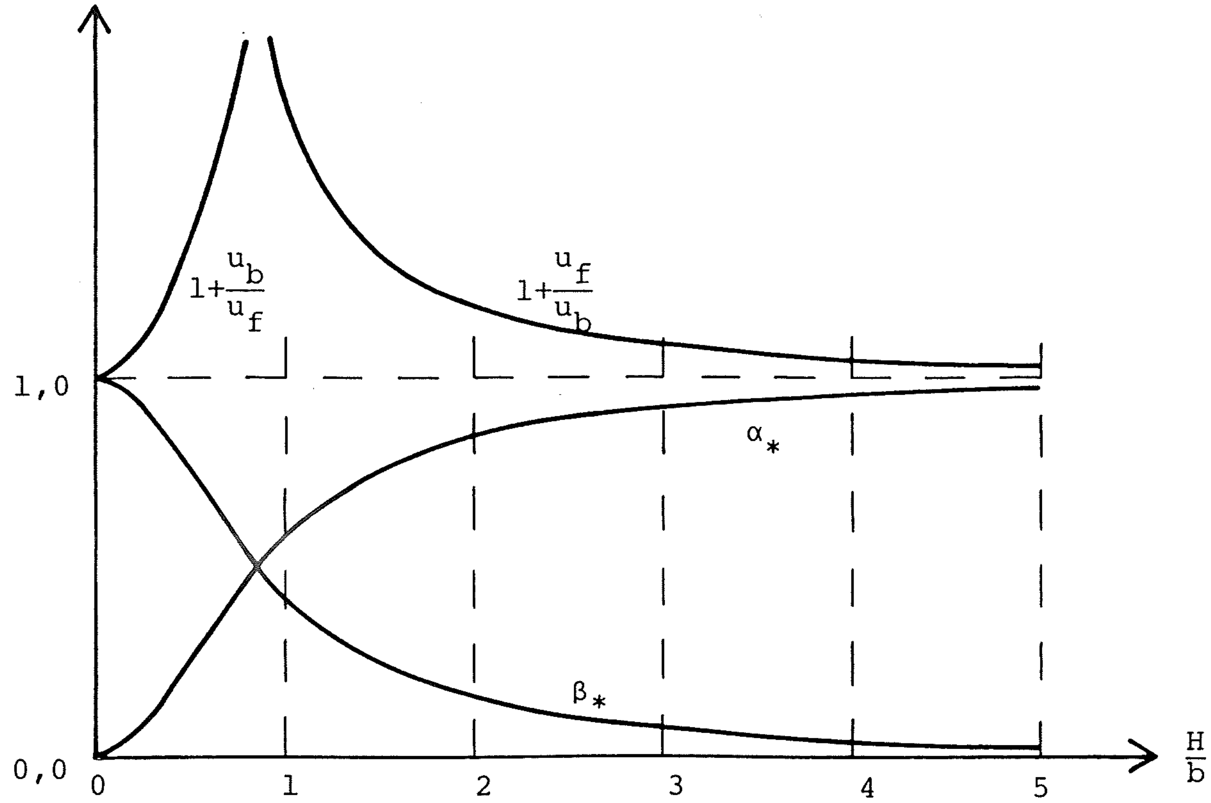
(4.34)
$$\boxed{u = u_b + u_f}$$

hvor u_b er udbøjningen hidrørende fra normalspændingerne og u_f forskydningsspændingernes bidrag. Disse er

(4.35)
$$\boxed{\begin{aligned} u_b &= \frac{1}{3}\frac{P H^3}{EI} \\ u_f &= \kappa \frac{P H}{G A_k} \end{aligned}}$$

hvor κ er en tværsnitsafhængig konstant, A_k tværsnittets effektive kropareal og G forskydningselasticitetsmodulet (se f.eks. [4]).

Figur 4.14



$$u = \frac{1}{3}\,\frac{PH^3}{EI_*} \qquad\qquad I_* = \alpha_* I$$

$$u = \kappa\,\frac{PH}{GA_*} \qquad\qquad A_* = \beta_* A$$

143

For et rektangulært profil er

$$\kappa = 0{,}8 \qquad A_K = \frac{2}{3} \cdot t \cdot b$$

$$I = \frac{1}{12} t\, b^3$$

$$u_b = P \frac{4 H^3}{E b^3 t}$$

$$u_f = P \frac{1{,}2 H}{G b t}$$

Den samlede udbøjning u kan skrives

(4.36) $$u = u_b + u_f = u_b\left(1 + \frac{u_f}{u_b}\right) = u_f\left(1 + \frac{u_b}{u_f}\right)$$

Disse faktorers afhængighed af forholdet mellem væghøjde (H) og vægbredde (b) er vist på figur 4.14.

Det fremgår, at:

$$u \simeq u_b \quad \text{for} \quad H > 5\, b$$

$$u \to u_f \quad \text{for} \quad H \to 0$$

D.v.s., at stivhedstallene for væggene er proportionale med inertimomentet, når væggene er relativt høje sammenlignet med vægbredden, og proportionale med tværsnitsarealet, når væggene er relativt lave.

Mellemliggende højde-bredde-forhold kan der tages hensyn til ved f.eks. at indføre et korrigeret inertimoment:

Korrigeret inertimoment

(4.37) $$I_* = \alpha_* I$$

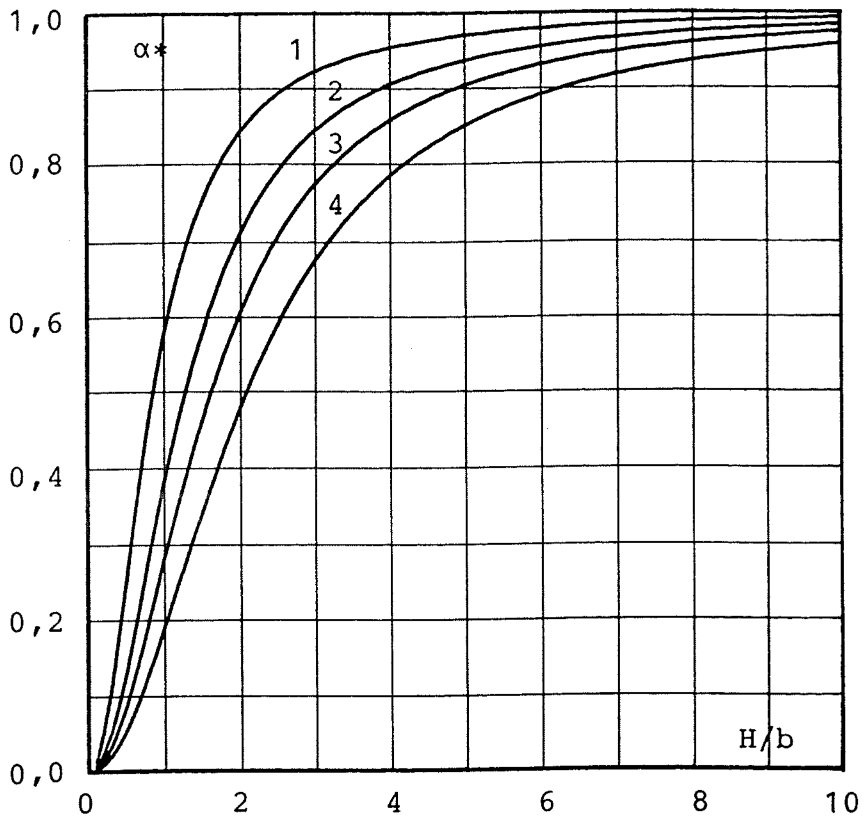
hvor α_* er en tværsnits- og højde-bredde-afhængig faktor, der sikrer, at stivhedstallet er proportionalt med det korrigerede inertimoment I_*.

Vi omskriver (4.36) ved hjælp af (4.35)

(4.38) $$u = \frac{1}{3} \frac{PH^3}{EI}\left(1 + \frac{3\kappa EI}{GA_K H^2}\right)$$

(4.39) $$u = \frac{1}{3} \frac{PH^3}{EI_*}$$

Figur 4.15



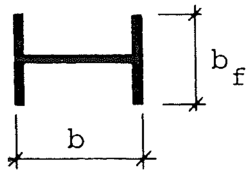
$$\alpha * = \frac{1}{1 + \frac{3 \cdot \kappa}{0,4} \cdot \frac{I}{A_K \cdot b^2} \cdot \left(\frac{b}{H}\right)^2}$$

1 : rektangulært vægtværsnit (plan væg)

2 : I-profil, $b_f/b = 1/4$

3 : I-profil, $b_f/b = 1/2$

4 : I-profil, $b_f/b = 1$



(145)

og α_* i (4.37) er altså lig med den reciprokke værdi af leddet i parantesen i (4.38).

(4.40)
$$\boxed{\alpha_* = \frac{1}{1 + \dfrac{3\kappa EI}{GA_K H^2}}}$$

G kan regnes til 0,4 · E for beton

På figur 4.15 er vist α_*'s variation med højde-bredde-forholdet dels for det rektangulære profil (det samme som på figur 4.14), og dels for I-profiler med forskellige relative flangebredder; kroppen forudsættes at stå i kraftretningen; kurverne for I-profilerne gælder også for u-profiler med de samme relative flangebredder.

Figur 4.16 viser en oversigt over omtrentlige værdier for κ og A_K for rektangulært tværsnit og for nogle profiler med flangebredde på omkring 1/2 å 1 gange krophøjden b.

Som antydet på figur 4.14 kunne vi i stedet have indført et korrigeret tværsnitsareal, men det vil kun være praktisk ved små H:b forhold.

Vægstivhed på tværs

Der regnes normalt med, at plane vægges stivhed på tværs af deres plan kan sættes til nul.

Hvis væggene i eksempel 4.01 har en tykkelse t = 0,1 · a, fås for hver af de korte vægge (med længden 2a), der har stivheden C_o i væggens plan, en stivhed på tværs

$$C_{\perp,2a} = C_o \cdot \frac{t^2}{(2a)^2} = C_o \cdot 0{,}0025$$

og for hver af de lange vægge (med længden 4a), der har stivheden $8C_o$ i væggens plan, en stivhed på tværs

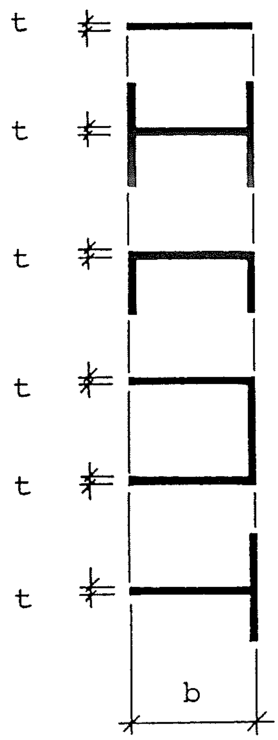
$$C_{\perp,4a} = 8C_o \cdot \frac{t^2}{(4a)^2} = C_o \cdot 0{,}005$$

De samlede stivheder C^x og C^y, der i eksemplet er beregnet til $C^x = 2 \cdot C_o$ og $C^y = 18 \cdot C_o$, bliver, hvis vægstivhederne på tværs medregnes

$$C^x = 2 \cdot C_o + 2 \cdot 0{,}005 \cdot C_o + 2 \cdot 0{,}0025 \cdot C_o$$
$$= 2{,}015 \cdot C_o$$

Figur 4.16.

Tværsnitskonstanter κ og A_K til brug i udtrykket for α* (formel (4.40)), for rektangulært tværsnit og tværsnitsprofiler med flangebredde på ca. 1/2 å 1/1 gange krophøjden.



	κ	A_K
	0,8	$\frac{2}{3} \cdot t \cdot b$
	ca. 0,95	ca. $0{,}9 \cdot t \cdot b$
	ca. 0,95	ca. $0{,}9 \cdot t \cdot b$
	ca. 0,9	ca. $0{,}75 \cdot 2 \cdot t \cdot b$
	ca. 0,9	ca. $0{,}75 \cdot 1 \cdot t \cdot b$

$$C^y = 18 \cdot C_o + 2 \cdot 0{,}0025 \cdot C_o = 18{,}005 \cdot C_o$$

- altså en betydningsløs forskel.

Vridningsstivheden for en væg

Der regnes ligeledes normalt med, at vridningsstivheden af den enkelte væg kan sættes til nul.

Kun for vægprofiler med lukket (tyndfliget) tværsnit er vridningsstivheden så stor, at den skal medregnes. - Se formel (4.19) og (4.20) og det tilknyttede eksempel.

Vægge med åbninger

Et andet forhold, der spiller ind ved beregning af en vægs stivhedstal, er, at vægge kan være forsynet med åbninger til døre og vinduer. Disse vægges stivhed kan ikke umiddelbart beregnes ved hjælp af bjælketeorien.

Hvis åbningerne er placeret i lodrette rækker, og hvis de i samme lodrette række er lige store og er placeret med samme afstand i hele væggens højde, kan forskydningslagsmetoden anvendes. Se omtalen af den senere.

Hvis åbningerne ikke er placeret systematisk som ovenfor, må andre beregningsmetoder anvendes, og dette vil kræve EDB.

Stivheden af dækskiverne

Til belysning af forudsætningen om de uendelige stive dækskiver er i figur 4.17 vist nogle etageplaner for skivebygninger med plane vægge (afstivende vægge på den anden led er ikke vist). Vægtværsnittene har enten samme inertimoment som dækskiven eller (for halvt så store vægge) et inertimoment på 1/8 af dækskivens. Dækskiven er belastet med en jævnt fordelt linielast p over bygningens længde L. Bygningshøjden er H.

Fordelingen af linielasten til væggene er udregnet dels under forudsætning af uendelig stiv dækskive ved hjælp af dækskivefordelingsmetoden, og dels med en endelig stivhed for dækskiven ved hjælp af kraftmetoden (dækskiven betragtet som en bjælke, der er elastisk understøttet af væggene); der er her kun taget hensyn til bøjningsspændingernes bidrag til deformationerne.

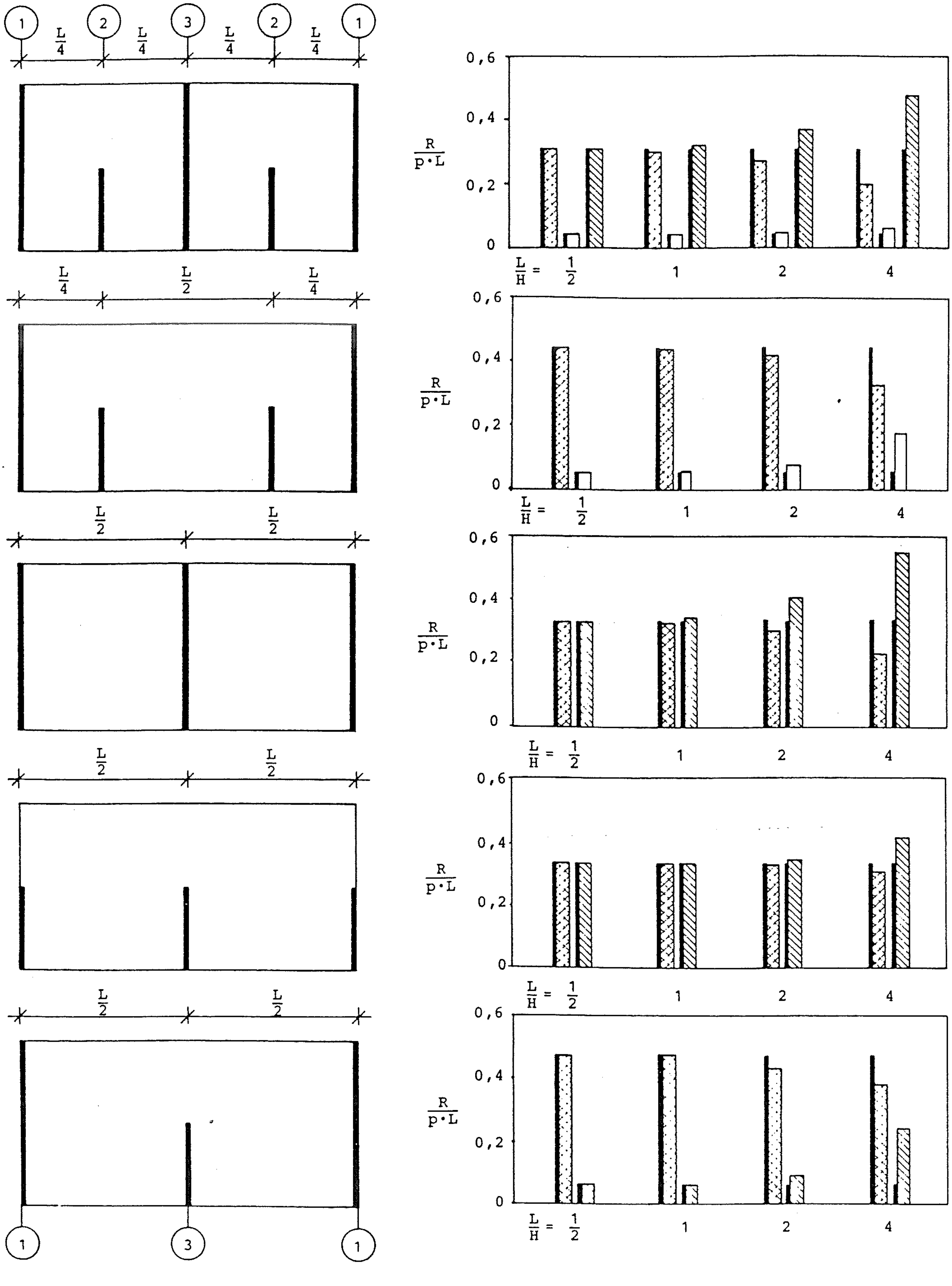
Søjlediagrammet viser kraften R i væggen, divideret med $p \cdot L$.

Figur 4.17. Een-etages bygning. Jævnt fordelt linielast p på dækskiven.
Søjlediagram med lastfordeling til vægge i de viste etageplaner (afstivende vægge på den anden led ikke vist) for forskellige L/H forhold.

L = længde af bygning. H = højde af bygning. R = kraft i væg.

væg i linie 1. væg i linie 2. væg i linie 3.

De smalle sorte søjler i diagrammet viser kraften i væggen under forudsætning af uendelig stiv dækskive.



De smalle sorte søjler i diagrammet viser kraften i væggen under forudsætning af uendelig stiv dækskive; de brede søjler viser kraften under forudsætning af endelig stivhed for dækskiver med samme elasticitetsmodul som væggene.

Det ses, at i alle de viste eksempler fås tilnærmelsesvis samme resultat med endelig og uendelig stivhed for dækskiven, når bygningens højde er mindst lige så stor som længden.

Hvor stor forskel, der ellers er, afhænger af placeringen af væggene og størrelsen (stivheden) af dem, dels indbyrdes imellem væggene og dels væggenes stivhed i forhold til dækskivens stivhed.

Forudsætningen om uendelig stive dækskiver er således en acceptabel tilnærmelse, hvis

væggene er relativt høje

afstandene mellem væggene er relativt små; eller

dækskivens tværsnit (inertimoment) er stort i forhold til væggenes.

I kapitel 4.8 er vist nogle resultater fra en EDB-beregning af en bygning, hvor dækskivernes endelige stivhed er taget i regning, og hvor der er benyttet skiveteori fremfor bjælketeori.

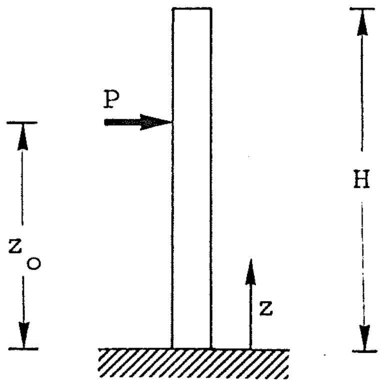
4.6 Indvirkningen af flere dækskiver på væggene

I udledningen af fordelingsformlerne er der betragtet een dækskive på et system af vægge.

Skal metoden kunne bruges på en fler-etages bygning med flere dækskiver, er det nødvendigt, at dækskiverne i de andre etager tillader væggene at deformere som forudsat.

Dette kan vises (se figur 4.18) at være tilfældet, så længe vægbjælkens deformation kun stammer fra normalspændingerne, samtidig med at der ses bort fra væggens vridningsstivhed.

Figur 4.18.



Betragtes en indspændt bjælke påvirket af kraften P i afstanden $z = z_o$ fra indspændingen, er udbøjningen følgende:

$$u = \begin{cases} \frac{P}{6\,EI} z^2 (3\,z_o - z) & \text{for } z \leq z_o \\ \frac{P}{6\,EI} z_o^2 (3\,z - z_o) & \text{for } z \geq z_o \end{cases}$$

Indsættes $u_P = \frac{1}{3}\frac{P\,z_o^3}{EI}$ og $\eta = \frac{z}{z_o}$ fås

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2} u_P\, \eta^2 (3-\eta) = u_P\, f\{\eta\} & \text{for } z \leq z_o \\ \frac{1}{2} u_P\, (3\,\eta - 1) = u_P\, g\{\eta\} & \text{for } z \geq z_o \end{cases}$$

Betragtes nu et dæk i niveauet $z = z_o$, som påtvinges en flytning givet ved u_{oF}, v_{oF} og θ_o. Væggene vil da blive påtvunget flytninger i dette niveau givet ved (3.5-3):

$$u_{oi} = u_{oF} - (y_i - y_F)\theta_o$$
$$v_{oi} = v_{oF} + (x_i - x_F)\theta_o$$
$$\theta_{oi} = \theta_o$$

I højden $z < z_o$ vil vægbjælkernes deformation være givet ved

$$u_i = u_{oi}\, f\{\eta\} = [u_{oF} - (y_i - y_F)\theta_o]\, f\{\eta\}$$

$$v_i = v_{oi}\, f\{\eta\} = [v_{oF} + x_i - x_F)\theta_o]\, f\{\eta\}$$

$$\theta_i = ?$$

Flytningerne i højden $z < z_o$, ses at være en stift-legeme bevægelse, hvis $\theta_i = \theta_o\, f\{\eta\}$. D.v.s, at et dæk i dette niveau ville have fulgt flytningen, uden at der opstår snitkræfter mellem dæk og vægge i dette niveau.

Noget ganske tilsvarende gælder for $z > z_o$.

Imidlertid gælder for vægge med vridningsstivhed

$$\theta = \begin{cases} \theta_o & \text{for } z \geq z_o \\ \theta_o \frac{z}{z_o} & \text{for } z \leq z_o \end{cases}$$

hvorfor det må fordres, at væggene er relativt vridningsslappe for ikke at bevirke dannelse af snitkræfter i andre niveauer.

Det betyder, at belastningens vandrette fordeling kan ske ved at beregne fordelingen for hvert enkelt dæk for sig, hvorefter væggenes snitkræfter kan beregnes ved at betragte væggene (som bjælker indspændte i fundamenterne), belastet med de fundne snitkræfter mellem dækskiverne og væggene (se iøvrigt kapitel 5.1).

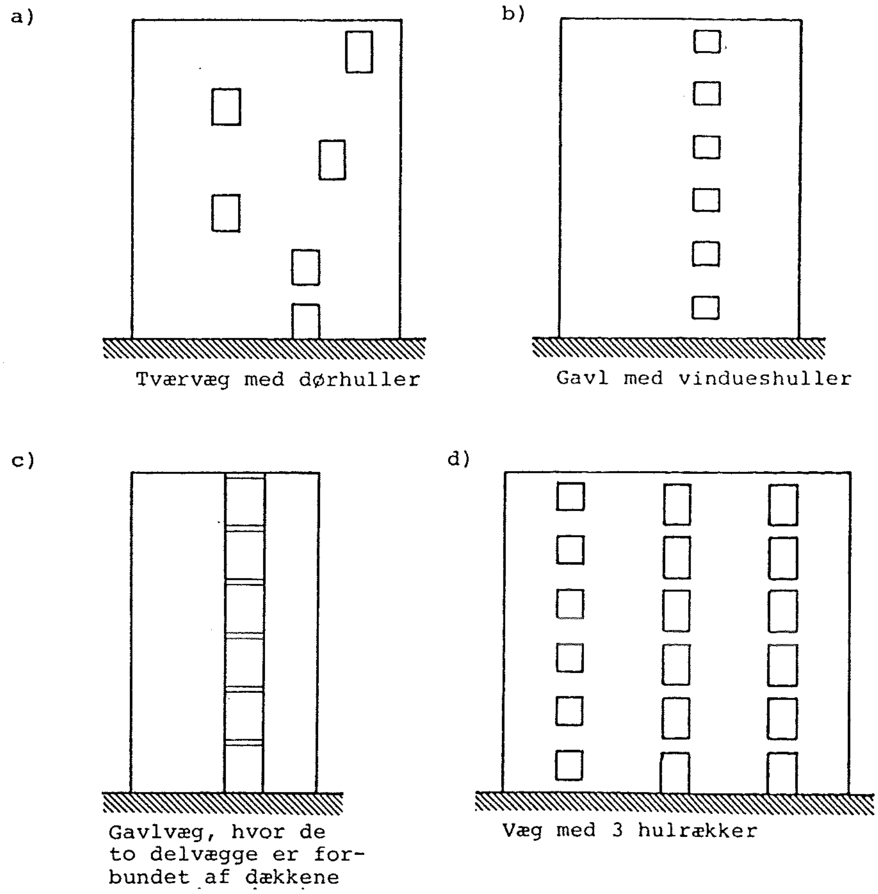
I de tilfælde, hvor væggenes stivheder beregnes på grundlag af korrigerede inertimomenter (jfr. formel 4.37), og i de tilfælde, hvor der ikke ses bort fra vridningsstivheden for en væg, vil det ikke længere være helt korrekt at fordele kræfterne i et dækskiveniveau uafhængigt af dækskiver i andre niveauer.

Som tilnærmelse kan man dog i mange tilfælde bruge de udledte fordelingsformler, idet man ved beregning af korrigeret inertimoment og af (eventuel) vridningsstivhed benytter en gennemsnitshøjde.

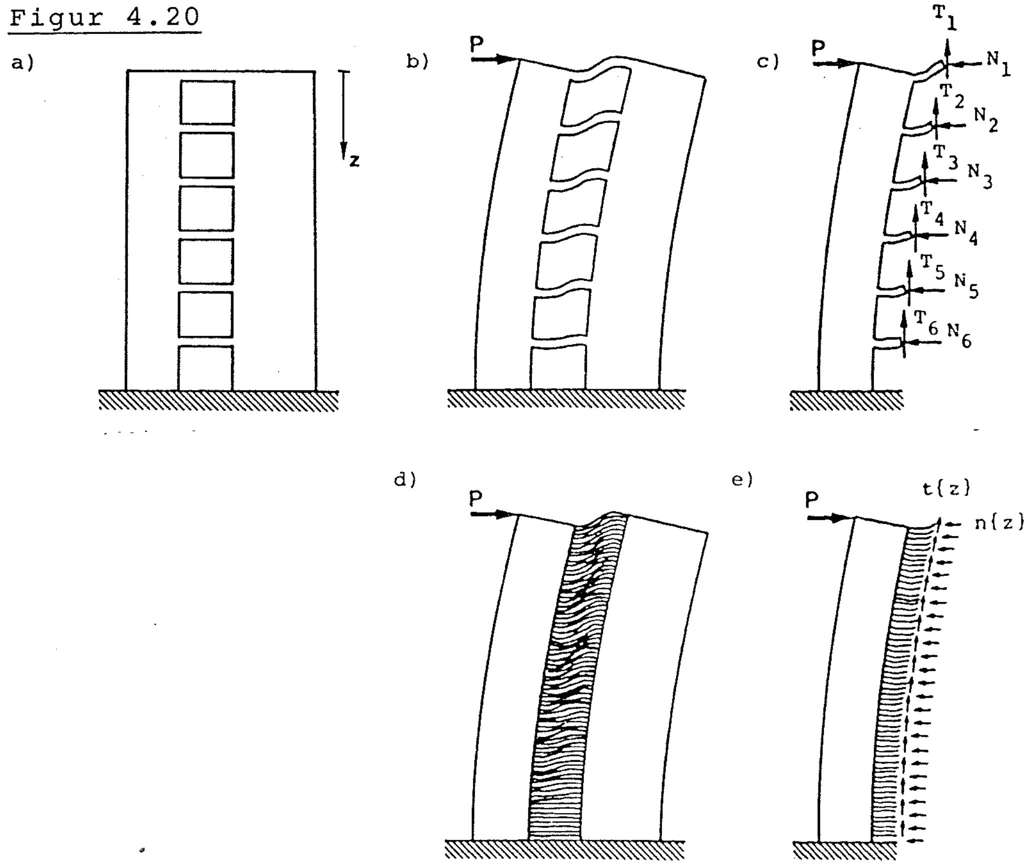
Man må dog nøje overveje, om tilnærmelsen kan være acceptabel og ellers bruge andre beregningsmetoder, hvilket i almindelighed vil kræve EDB.

I kapitel 4.8 er vist nogle resultater fra en EDB-beregning af en bygning i 4 etager, hvor indvirkningen af flere dækskiver er illustreret. Der er benyttet skiveteori, således at forskydningsspændingernes betydning for deformationerne - både i væggene og i dækskiverne - er taget i regning.

Figur 4.19



Figur 4.20



(153)

4.7 Om forskydningslagsmetoden

I forbindelse med fastlæggelsen af væggenes stivheder er der regnet med, at væggene havde konstant tværsnit i hele deres højde, og de blev derfor regnet som bjælker indspændt i fundamentet.

Det forekommer imidlertid ofte, at en afstivende væg er forsynet med dør- eller vindueshuller (se figur 4.19) . Stivheden af en sådan væg er mindre end en tilsvarende væg uden huller, og der skal i det følgende ses på en beregningsmodel for en sådan væg.

Metoden forudsætter:

1) at hullerne har rektangulær form med sider parallelle med den tilhørende vægs sider,
2) at hullerne i samme lodrette række (en hulrække) er lige store og placeret ensartet og ækvidistant i hele væggens højde.

Metoden kan altså anvendes på de på figur 4.19 b, c og d viste vægge, men ikke på væggen på figur 4.19 a, da hullerne er uregelmæssigt placeret.

Metodens princip er søgt antydet på figur 4.20 . På figur a er vist en 6-etagers væg med en hulrække. Udsat for en vandret belastning P i toppen, vil væggen deformere som vist (overdrevet) på figur b.

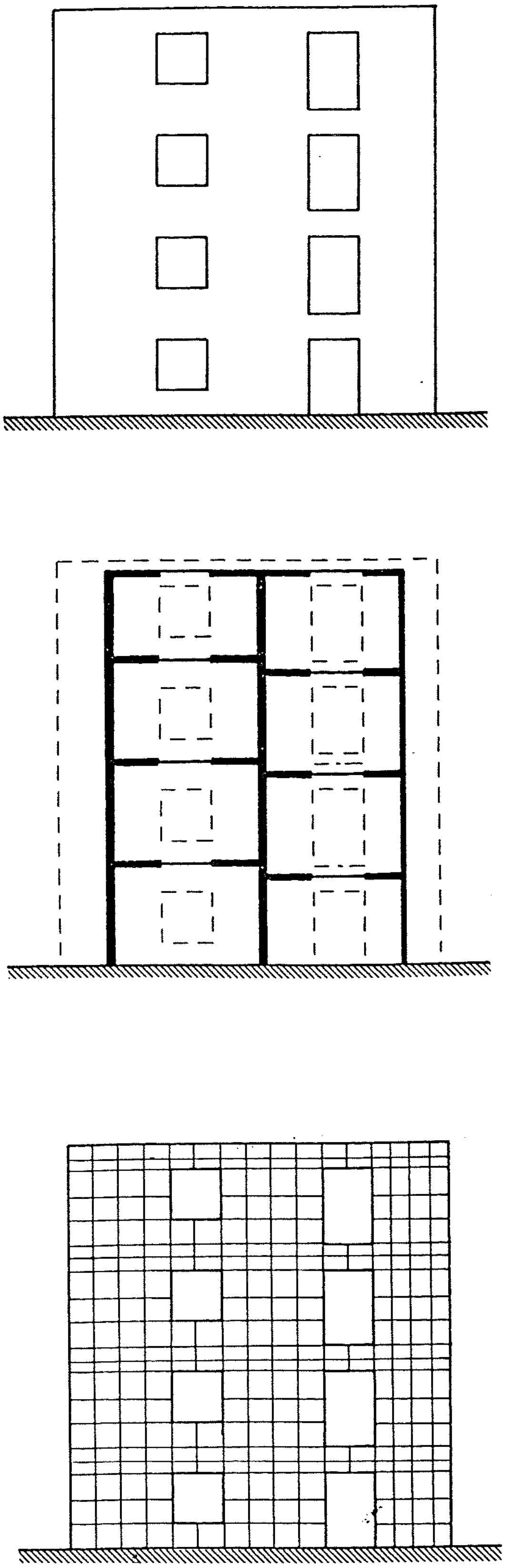
Lægges der et snit gennem tværbjælkernes momentnulpunkter, vil der i snittet optræde de på figur c viste snitkræfter T_1, T_2, ..., T_6 og N_1, N_2, ..., N_6. Disse ubekendte snitkræfter kan bestemmes ved hjælp af kraftmetoden [16], men der bliver tale om at løse et ligningssystem med lige så mange ligninger, som der er ubekendte.

Erstattes hulrækken med en tæt række lameller med den egenskab, at de sikrer de to delvægge A og B samme deformation (se figur d), vil snitkræfterne langs momentnulpunktsnittet stort set variere kontinuert fra lamel til lamel, således at snitkræfterne kan beskrives ved to funktioner t{z} og n{z}. Det kan bevises, at snitkraftberegningen kan reduceres til løsning af en differentialligning i forskydningskraftfunktionen t{z}, og antallet af ubekendte er således reduceret til én funktion for hver hulrække.

Det tætte lag af lameller betegnes et forskydningslag, hvoraf navnet forskydningslagsmetoden. Metoden er første gang på dansk beskrevet af Eriksson i 1961 [17], hvor metoden blev anvendt til beregning af de afstivende vægge i Høje Gladsaxe-byggeriet. Metoden er siden beskrevet i en lang række artikler i udlandet, og på det sidste har SBI udsendt en rapport [18], hvori beregningsmetoden nærmere beskrives og analyseres i forbindelse med udarbejdelsen af et EDB-program til metoden [19].

Beregningerne for vægge med en hulrække kan klares ved håndregning, men metoden vil ikke blive nærmere gennemgået i disse noter.

Figur 4.21



a. Væg med dør- og vinduesrække.

b. En rammeanalogi, hvor væggens dele ækvivaleres med rammedele med forskellige stivheder.

c. En mulig opdeling af væggen i mindre elementer.

(156)

4.8 Om andre beregningsmetoder

De metoder, der er beskrevet i disse noter, stiller krav om, enten at væggene er homogene med konstant tværsnit fra fundament til overkant væg, eller at de desuden er forsynet med regelmæssigt placerede rektangulære huller.

Af metoder, der kan tage hensyn til en vilkårlig væggeometri skal nævnes dels Elementmetoden, dels Rammemetoden.

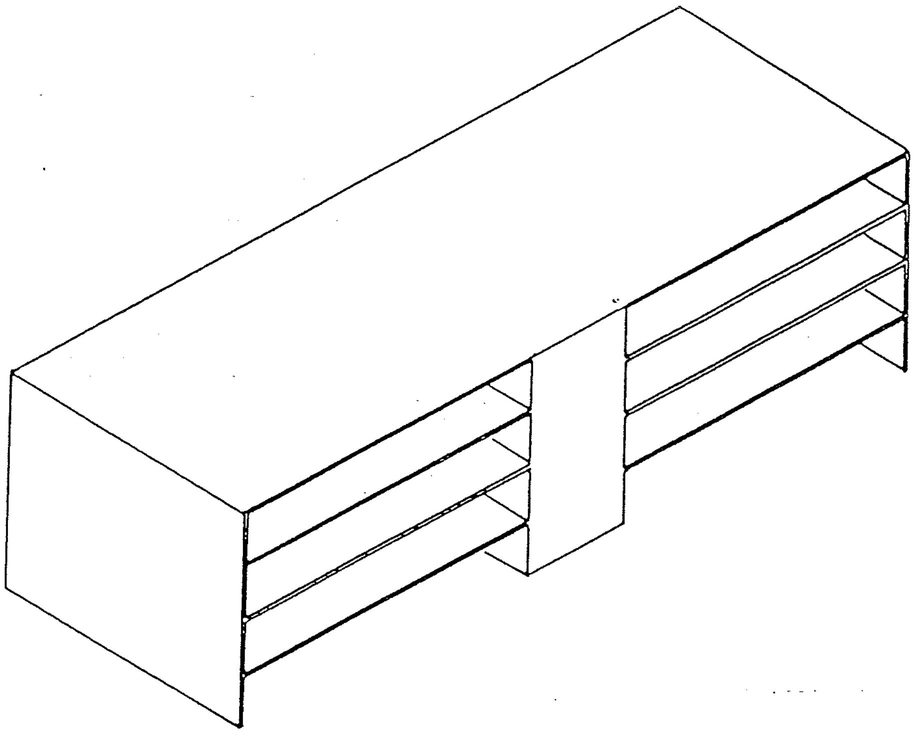
Rammemetoden (se f.eks. [25]) baserer sig på lidt af det samme som forskydningslagsmetoden. De enkelte dele af væggene ækvivaleres med rammedele (bjælker og søjler) med stivheder afpasset hele vægdelens geometri og ikke blot bredden, som tilfældet er i forskydningslagsmetoden. Der fremkommer herved en rammekonstruktion, som kan beregnes efter de sædvanlige rammeberegningsmetoder (se figur 4.21 b).

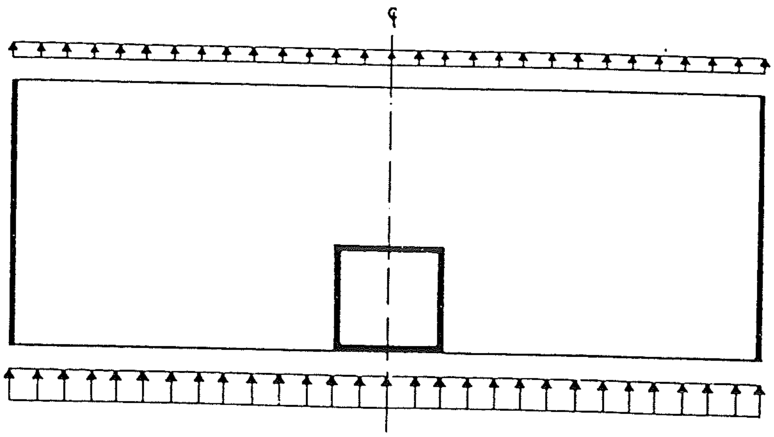
Elementmetoden (se f.eks. [24], er den mest generelle.

I elementmetoden foretages en opdeling af væggen i mindre elementer (se figur 4.21 c). Ved at antage, at deformationstilstanden indenfor hvert element er konstant, er det muligt at beregne spændingstilstanden i væggen. Beregningerne er omfangsrige og kan kun udføres ved brug af en datamat.

I figur 4.22 og 4.23 er vist et eksempel på beregning med STRUDL. Figur 4.22 viser en bygning i 4 etager. Bygningen er belastet med vind på tværs. For hver etage er i figur 4.23 udtegnet en halv dækskive med hovedspændingernes størrelser og retninger.

Figur 4.22. 4-etages skivebygning.

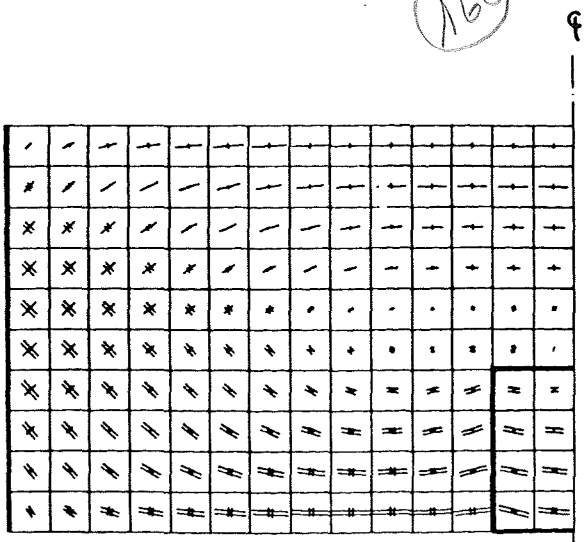




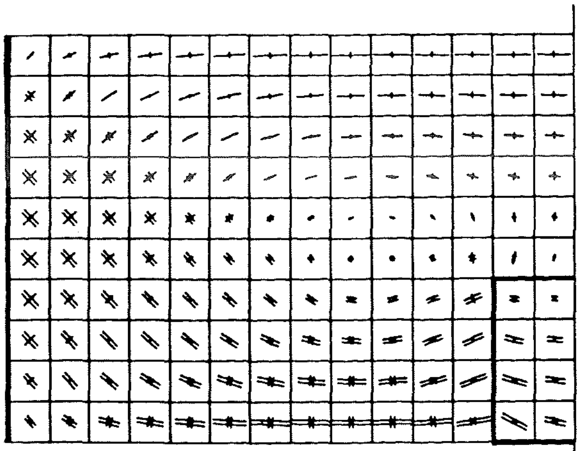
160

Figur 4.23.

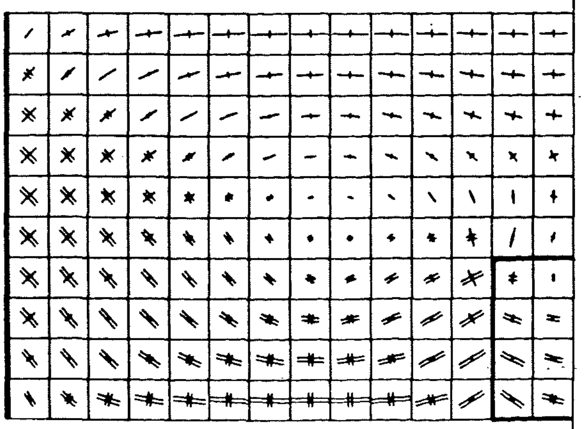
Hovedspændinger i dækskiver, beregnet med STRUDL, dobbeltstreg er tryk, enkeltstreg er træk; der er kun vist halvdelen af hver dækskive.



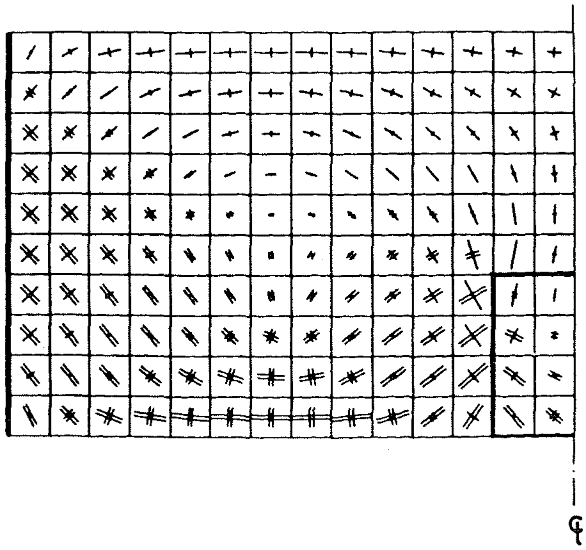
Etage 4



Etage 3



Etage 2



Etage 1

(159)

5. BYGNINGENS BEREGNING

For bygninger gælder det, at konstruktionen med en given sikkerhed skal kunne modstå de laster, den er forudsat udsat for, jævnfør [26] Sikkerhedsbestemmelser for konstruktioner (DS 409) og last på konstruktioner (DS 410), juni 1982. Eftervisning af sikkerheden kan ske ved beregning og ved prøvning.

En bygnings konstruktion skal opfylde en del andre betingelser, som ikke omtales her.

Her behandles kun forhold vedrørende beregningsmæssige eftervisning af konstruktionens sikkerhed mod brud.

Det skal i denne forbindelse eftervises, at de snitkræfter (eller spændinger) i konstruktionen, som forårsages af belastningen på bygningen, kan optages.

5.1 Belastningens vej til fundament

En bygning skal udsættes for både vandret og lodret last, og konstruktionen skal undersøges for ugunstigste kombination efter sikkerheds- og lastnormen [26].

Snitkræfterne i konstruktionen kan beregnes for vandret last og lodret last hver for sig, og derefter findes ved summation, - sålænge superpositionsloven gælder.

Dette forudsættes at være tilfældet, hvorfor vandret og lodret last behandles hver for sig i det følgende.

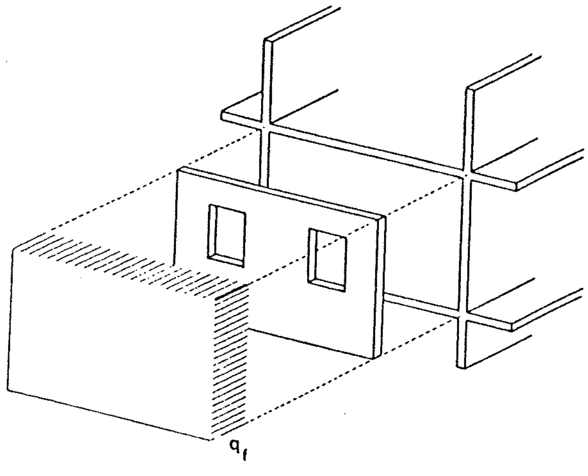
Vandret last

Af vandret last forekommer i almindelighed kun vindlast og masselast.

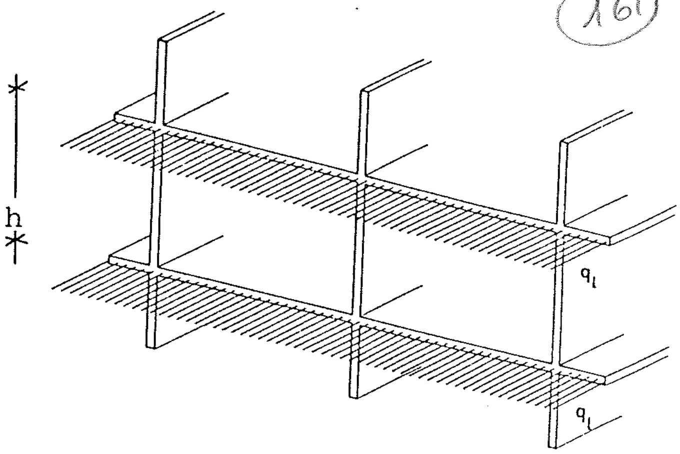
Vind

I det følgende betragtes belastningen vind på tværs af bygningen, benævnt som vind på facaden. Tilsvarende betragtninger gælder selvfølgelig for vind på langs ad bygningen.

Belastningen er en fladelast, som regel regnet jævnt fordelt.



Figur 5.01

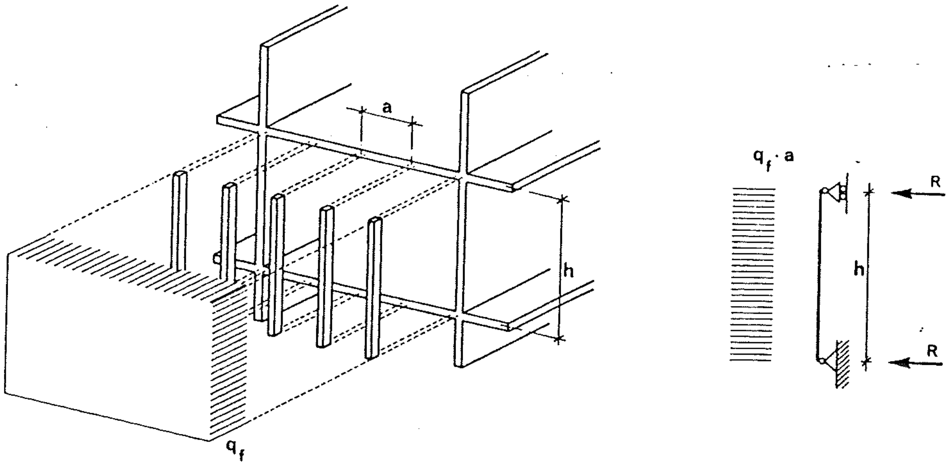


Figur 5.02

Facaden kan være opbygget af elementer, der hver især virker som enkeltspændt (evt. dobbeltspændt) plade, eller en skeletkonstruktion med lodretstående bjælker gående fra dæk til dæk til at overføre vindlasten. Facaden understøttes af dækkene (eventuelt også af søjler eller tværvægge). Se figur 5.01.

Dækskiverne skal nu føre (vind)lasten videre; hvis facaden (også) er understøttet på søjler, skal disse føre lasten ud til dækskiverne.

Belastningen på dækskiven er en (jævnt fordelt) linielast. Hvis facaden virker som plade og (kun) er understøttet på dækskiverne, fås direkte, at $q_l = q_f \cdot h$ med betegnelserne fra figur 5.01 og 5.02.



Figur 5.03

Er facaden en skeletkonstruktion med lodrette bjælker, fås en række enkeltkræfter ($2 \times R_1$), som kan ækvivaleres med liniełasten $q_1 = q_f \cdot h$. Se figur 5.03. Hvis etagehøjden over og under dækket er henholdsvis h_n og h_{n+1} fås

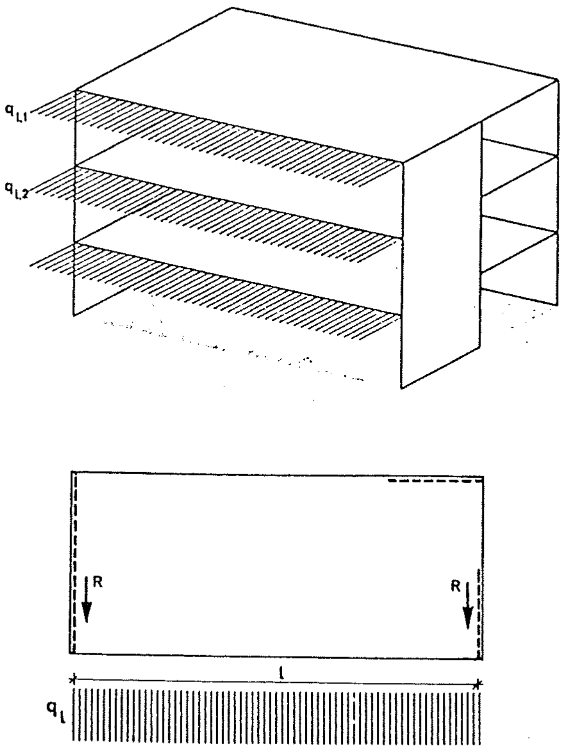
$$q_{1n} = q_f \cdot \frac{1}{2} (h_n + h_{n+1}).$$

Hvis vi har at gøre med en statisk bestemt dæk- og væg-skivekonstruktion, er belastningsnedføringen klar og snitkræfterne i dæk- og vægskiverne kan umiddelbart beregnes.

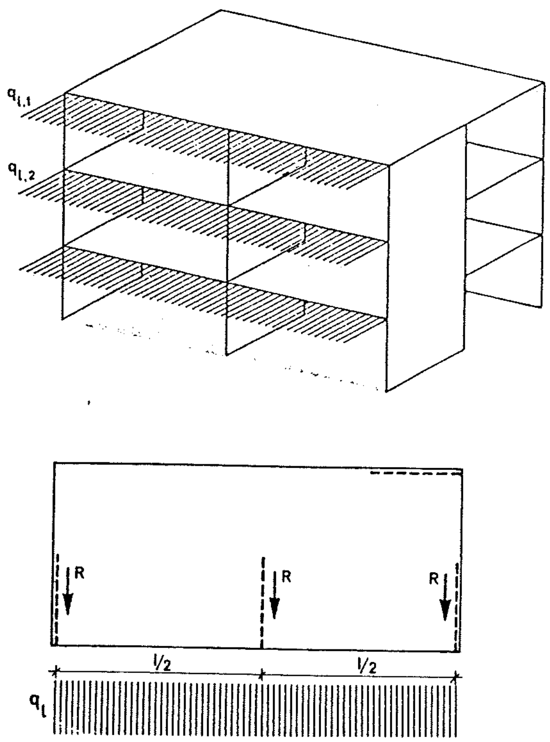
På figur 5.04 ses et eksempel på en konstruktionsmodel med belastning og statisk hovedsystem for dækskiven.

Har vi at gøre med en statisk ubestemt dæk- og væg-skivekonstruktion med ∞-stive dækskiver må fordelingen på væggene bestemmes efter f.eks. dækskivefordelingsmetoden.

På figur 5.05 ses et eksempel på en konstruktionsmodel med belastning og statisk hovedsystem for dækskiven.



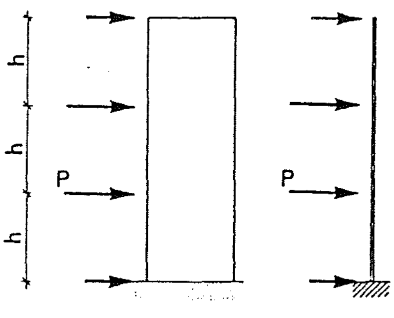
Figur 5.04



Figur 5.05

Herefter skal væggene (vægskiverne) så føre lasten ned til fundament. Belastningen er enkeltkræfter i dækniveauerne. Væggene beregnes normalt som bjælker indspændte i fundamenterne.

Figur 5.06 viser et eksempel på en væg med belastning og statisk hovedsystem.



Figur 5.06

Vandret masselast

Der er i det ovenstående betragtet en almindelig vindlast. Betragtes masselast haves en vandret last svarende til lodret last på dæk (incl. egenlast) angribende i dækniveau, samt en last svarende til egenlast af vægge, angribende i væggenes tyngdepunkter. Ofte henføres masselast hidrørende fra væggene til dæk over og under væggene.

For masselast i retningen vinkelret på facaden gælder tilsvarende som for vindlasten fra det trin, hvor facaden har afleveret lasten på dækskiverne.

Som regel vil man i statisk ubestemte konstruktioner med ∞-stiv dækskive fordele hele masselasten efter væggenes stivheder, altså også den del, der hidrører fra egenlast vægge.

Ækvivalent belastning på vægge

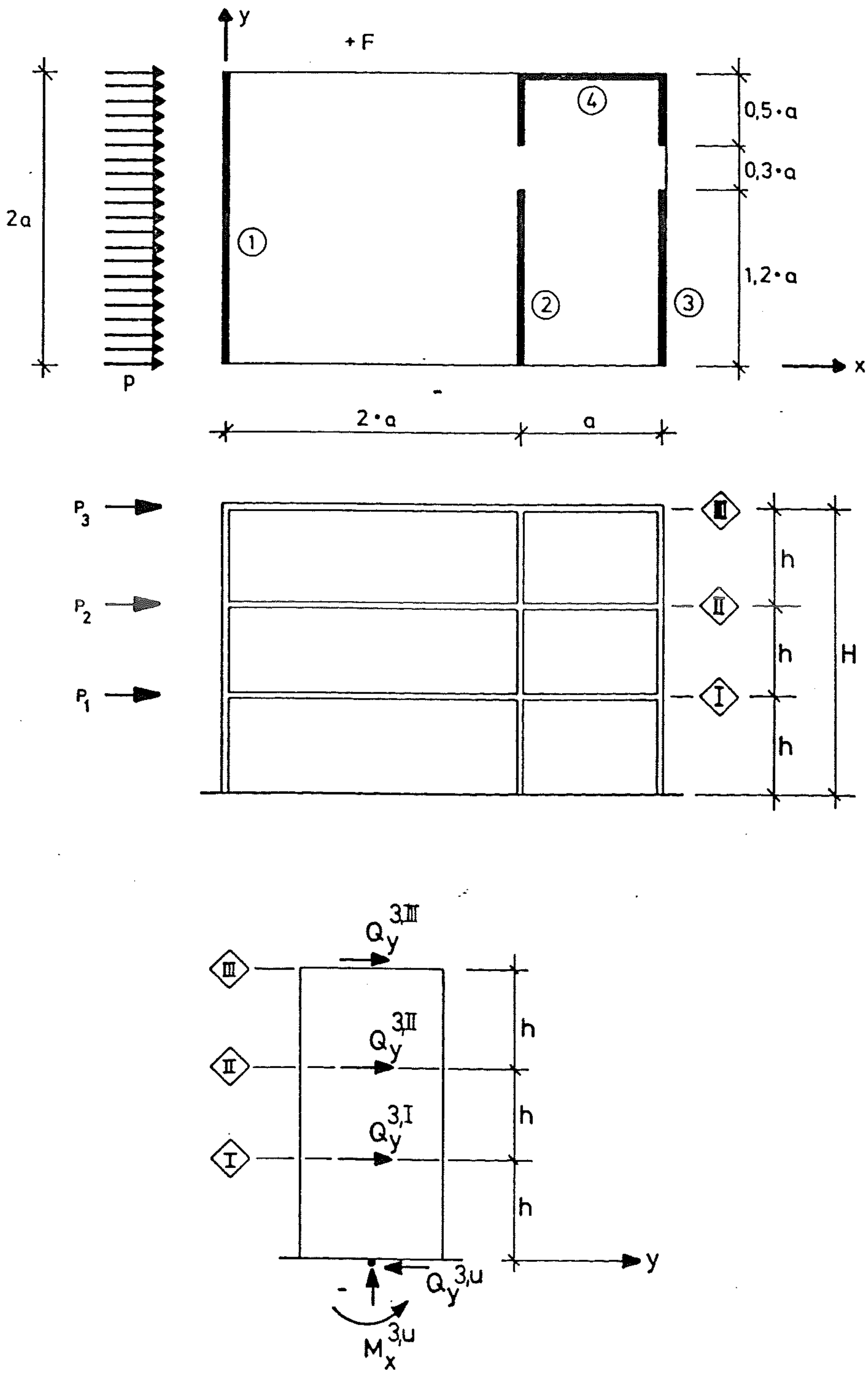
For høje bygninger med mange etager kan enkeltkræfterne P i dækniveauerne i indbyrdes afstand h ækvivaleres med en jævnt fordelt linielast på væggen, der er lig med enkeltkraften P, divideret med etagehøjden h.

Ved bygninger med få etager er dette ikke nogen god tilnærmelse, da den ækvivalente belastning, bestemt som ovenfor, ikke tager hensyn til forholdene ved top og bund af væggen.

Eksempel

I eksempel 5.01 er beregnet snitkræfterne nederst i en væg i skivebygningen i eksempel 4.02.

Figur 5.07


y
+F
2a
P
0,5·a
0,3·a
1,2·a
x
2·a
a
P3
P2
P1
III
II
I
h
h
h
H
III
II
I
$Q_y^{3,III}$
$Q_y^{3,II}$
$Q_y^{3,I}$
$Q_y^{3,u}$
$M_x^{3,u}$
h
h
h
y

Eksempel 5.01

I eksempel 4.02 er beregnet fordelingen af en vandret linielast til væggene i en én-etages skivebygning med samme etageplan som den her viste.

I dette eksempel skal beregnes snitkræfterne nederst i væg 3 i den her viste treetages skivebygning for en vandret last i samme retning som i eksempel 4.02. På de tre dækskiver virker en linielast på henholdsvis p_1, p_2 og p_3, - se figur 5.07.

I eksempel 4.02 blev fundet snitkraften mellem dækskiven og væg 3 (kraften på væggen positiv i y-aksens retning)

$$Q_y^3 = 0{,}499 \; p \, a$$

Der antages i dette eksempel samme forudsætninger som i eksempel 4.02.

I det der her regnes med

$$p_1 = p_o \qquad p_2 = p_o \qquad p_3 = 0{,}7 \; p_o$$

har vi da

$$Q_y^{3,III} = 0{,}499 \cdot (0{,}7 \; p_o) \cdot a \quad \text{i niveau III}$$

$$Q_y^{3,II} = 0{,}499 \cdot p_o \cdot a \quad \text{i niveau II}$$

$$Q_y^{3,I} = 0{,}499 \cdot p_o \cdot a \quad \text{i niveau I}$$

Snitkræfterne forneden i væggen, regnet positive som vist, bliver - se figur 5.07 -

$$Q_y^{3,U} = Q_y^{3,I} + Q_y^{3,II} + Q_y^{3,III}$$

$$= 0{,}499 \cdot (1 + 1 + 0{,}7) \cdot p_o \cdot a$$

$$Q_y^{3,U} = 1{,}347 \cdot p_o \cdot a$$

$$M_x^{3,U} = Q_y^{3,I} \cdot h + Q_y^{3,II} \cdot 2h + Q_y^{3,III} \cdot 3h$$

$$= 0{,}499 \cdot (1 \cdot h + 1 \cdot 2h + 0{,}7 \cdot 3h) \cdot p_o \cdot a$$

$$M_x^{3,U} = 2{,}545 \cdot p_o \cdot a \cdot h$$

Normalkraften = 0.

Lodret last

Den lodrette last i husbygning består af egenlast fra konstruktionen, eksempelvis dæk og vægge, samt nyttelast på dækkene, og snelast på taget.

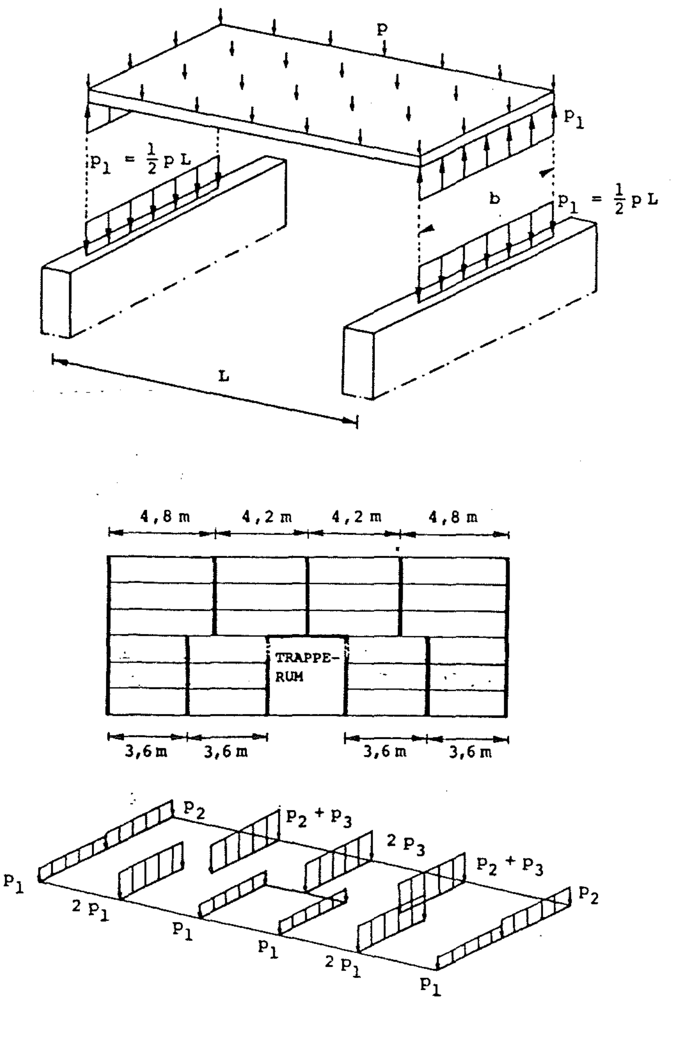
Man vil normalt regne med, at dækkene afleverer lasten til væggene for enderne af dækket, - som vist på figur 5.08. uden hensyntagen til tværfordeling til nabo-dækelementer med kortere spændvidde, og uden hensyntagen til fordeling til vægge, der står parallelle med spændretningen langs en dækelementkant.

Dækkene bærer som plader belastningen, der virker på dækket, ud til de understøttende vægge. Er dækkene elementer, der er enkeltspændte og simpelt understøttet på væggene, er belastningen på væggene statisk bestemt og let at beregne.

Eksempel 5.02

Betragtes en etage i et tværvægsbyggeri (figur 5.08) vil en jævnt fordelt, lodret last $p = 8$ kN/m^2 på dækelementerne blive fordelt ud til væggene, der bliver belastet med:

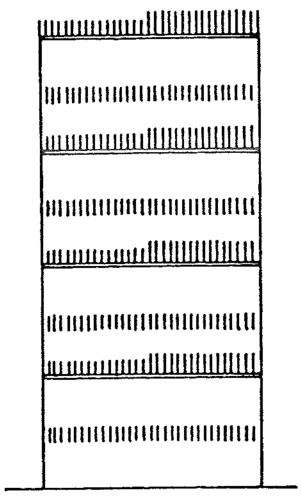
$$p_1 = 0{,}5 \cdot 3{,}6 \text{ m} \cdot 8 \text{ kN/m}^2 = 14{,}4 \text{ kN/m}$$
$$p_2 = 0{,}5 \cdot 4{,}8 \text{ m} \cdot 8 \text{ kN/m}^2 = 19{,}2 \text{ kN/m}$$
$$p_3 = 0{,}5 \cdot 4{,}2 \text{ m} \cdot 8 \text{ kN/m}^2 = 16{,}8 \text{ kN/m}$$



Figur 5.08

(168)

Figur 5.09



Væggene skal herefter føre belastningen ned til fundament.

Som det fremgår af figur 5.08 vil de enkelte vægge i hver etage blive påvirket af en eller flere linielaste af en størrelse, der ikke altid er den samme fra den ene af væggene til den anden, og eventuelt er nul på visse strækninger.

Figur 5.09 viser et eksempel på en væg med last fra dækkene og egenlast af væg for hver etage.

5.2 Lastfordeling i vægge

En væg kan - som allerede nævnt - være belastet af forskellige, ikke ens linielaste og enkeltlaste.

Ned igennem væggen vil ske en vis omfordeling.

Det forudsættes her, at påvirkningen på et snit i den nederste del af væggen er retlinet hen over væggen. Der regnes altså med en retlinet spændingsfordeling hen over væggen, - svarende til beregning efter den tekniske bjælketeori.

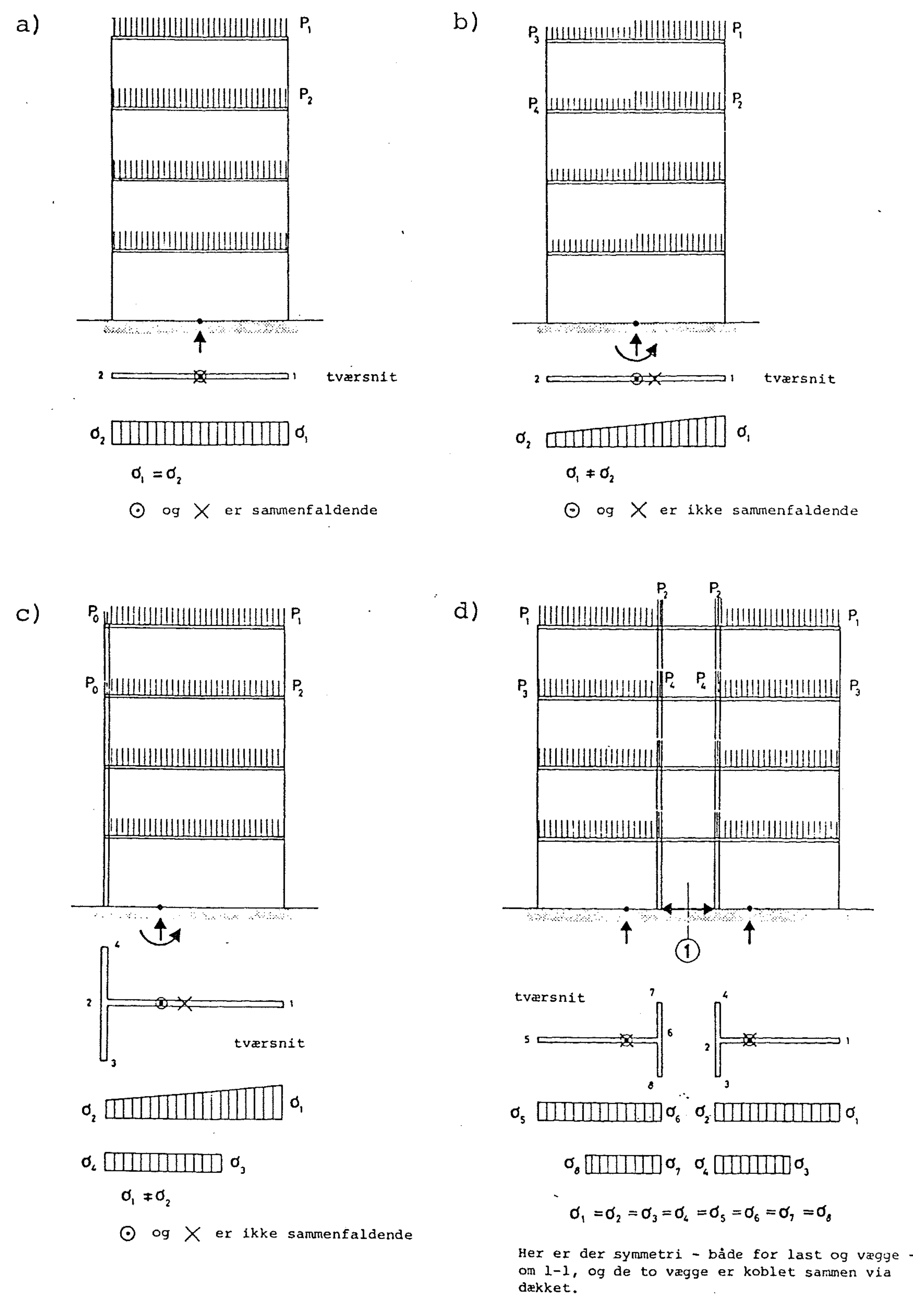
Spændingen regnes her konstant over vægtykkelsen.

Hvor belastningens resultant falder i vægtværsnittets tyngdepunkt, bliver normalspændingen den samme overalt fra den ene ende til den anden i væggen.

Ligger belastningens resultat ikke i vægtværsnittets tyngdepunkt vil normalspændingen variere hen over væggen.

Det er her forudsat, at der ikke optræder vandrette kræfter i vægplanen, som ophæver den varierende spænding.

På figur 5.10 ses nogle eksempler på lastfordeling i vægge med lodret last. På figuren vises spændingsfordelingen hen over væggen i forskellige tilfælde.



σ ang. normalspænding i væg

⊙ ang. væggens tyngdepunkt

× ang. beliggenheden af belastningens resultant

Figur 5.10 Lastfordeling hen over væggen.

I figur 5.10 der der symmetri - både for last og vægtværsnit - om en linie beliggende midt imellem de to små parallelle vægge (og også om en linie igennem de to vægge, der står på linie), og de to delprofiler (T'er) er koblet sammen via dækskiverne. Lasten vil derfor alene afstedkomme deformationer i lodret retning; væggen vil ikke få nogen udbøjninger ud til siden (d.v.s. vinkelret på vægbjælkens lodrette længdeakse).

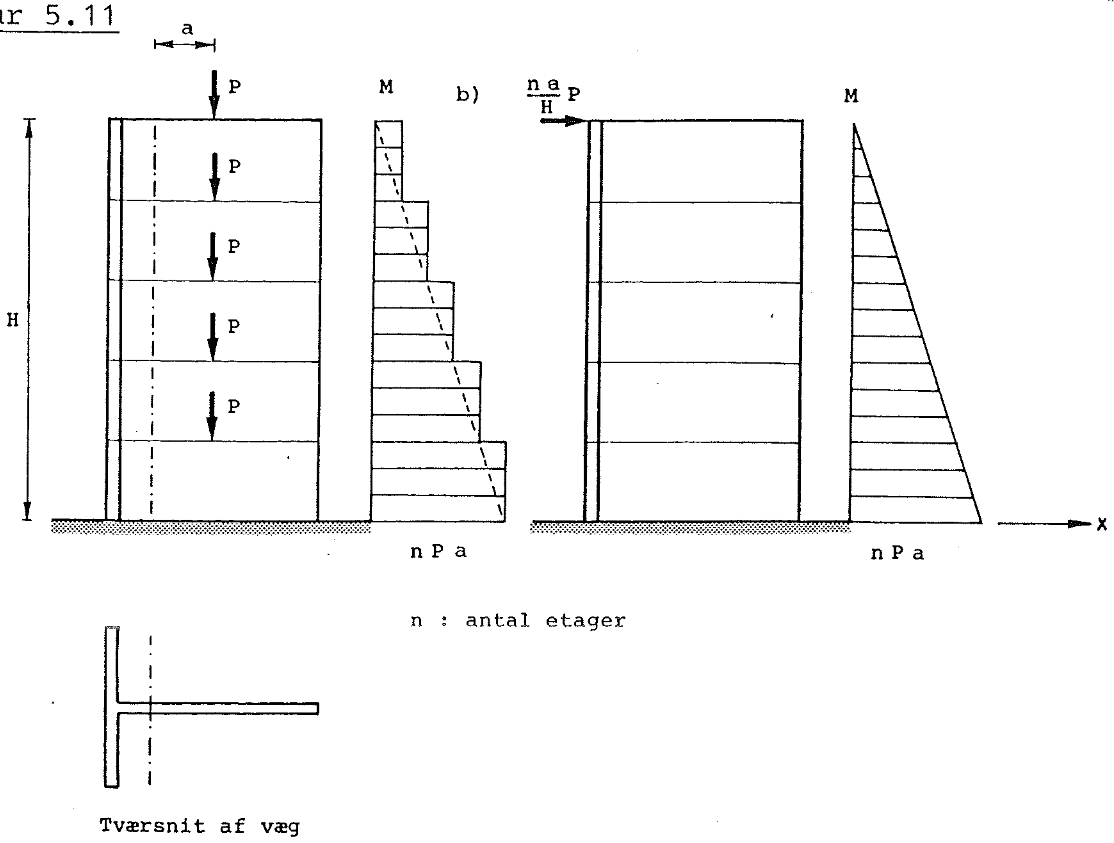
Dette betyder, idet Hookes lov regnes gældende, at normalspændingen bliver konstant over tværsnittet.

I forbindelserne mellem de to delprofiler (dækskiverne) vil der komme vandrette kræfter - hovedsagelig i de øverste dæk - sådan at resultanten af lodret og vandret last på det enkelte delprofil (T) går gennem dets tyngdepunkt.

I denne forbindelse er som nævnt regnet med konstant spænding over vægtykkelsen. Men i forbindelse med bæreevneeftervisning af væggen, betragtet som søjle med søjlelængde lig med etagehøjden, skal nærmere vurderes excentricitetsforholdene ud af vægplanen, se afsnit 5.5.

171

Figur 5.11



Sammenbindingen af væggene

I skivebygninger er væggene forbundet med dækskiverne, og i statisk ubestemte skivekonstruktioner medfører dette, at udbøjninger vinkelret på vægbjælkens lodrette længdeakse, hørende til momentet fra excentrisk lodret last på væggen, ikke kan ske frit for den enkelte væg. Der vil ske en udligning. De andre vægge vil via de stive dæk hindre den betragtede væg i at bøje frit ud. De vil med andre ord påvirke væggen med vandrette kræfter via dækket. Beregningen af disse kræfter kan ske ved hjælp af den omtalte metode til fordeling af vandrette belastninger.

De kræfter, der skal fordeles, kan findes således:

For hver excentrisk belastet væg beregnes en fiktiv snitkraft P' i toppen af væggen

$$P' = -\frac{n \cdot a}{H} \cdot P \tag{5.01}$$

Det ses af figur 5.11, at denne kraft P' numerisk giver tilnærmelsesvis samme momentkurve ned over væggen (se figur b) som den excentriske lodrette lasts trappeformede momentkurve (se figur a), og påsat i den rigtige retning vil den afbalancere momentet fra den lodrette last.

P' indføres som snitkraft mellem væggen og øverste dæk, d.v.s. dels på væggen og dels på dækskiven (der er således ikke påført bygningen som helhed ekstra ydre last).

I (5.01) skal a regnes med fortegn. a regnes fra tyngdepunktet til belastningsresultanten positiv i akseretningen.

P forudsættes at virke nedad.

Fortegnet for P' passer da ind i reglerne for fortegnsregningen for snitkræfter mellem dæk og vægge i henhold til figur 4.06, nemlig: snitkraften P' regnes positiv, når den virker på væggen i akseretningen og på dækskiven modsat akseretningen.

Snitkræfterne P' på dækskiven optræder i fordelingsberegningen (efter dækskivefordelingsmetoden) som ydre last, og da kompostanterne af den ydre last regnes positive i akseretningerne bliver den last, der skal fordeles:

(5.02) $$\boxed{P_x = -\Sigma P'_x \qquad P_y = -\Sigma P'_y}$$

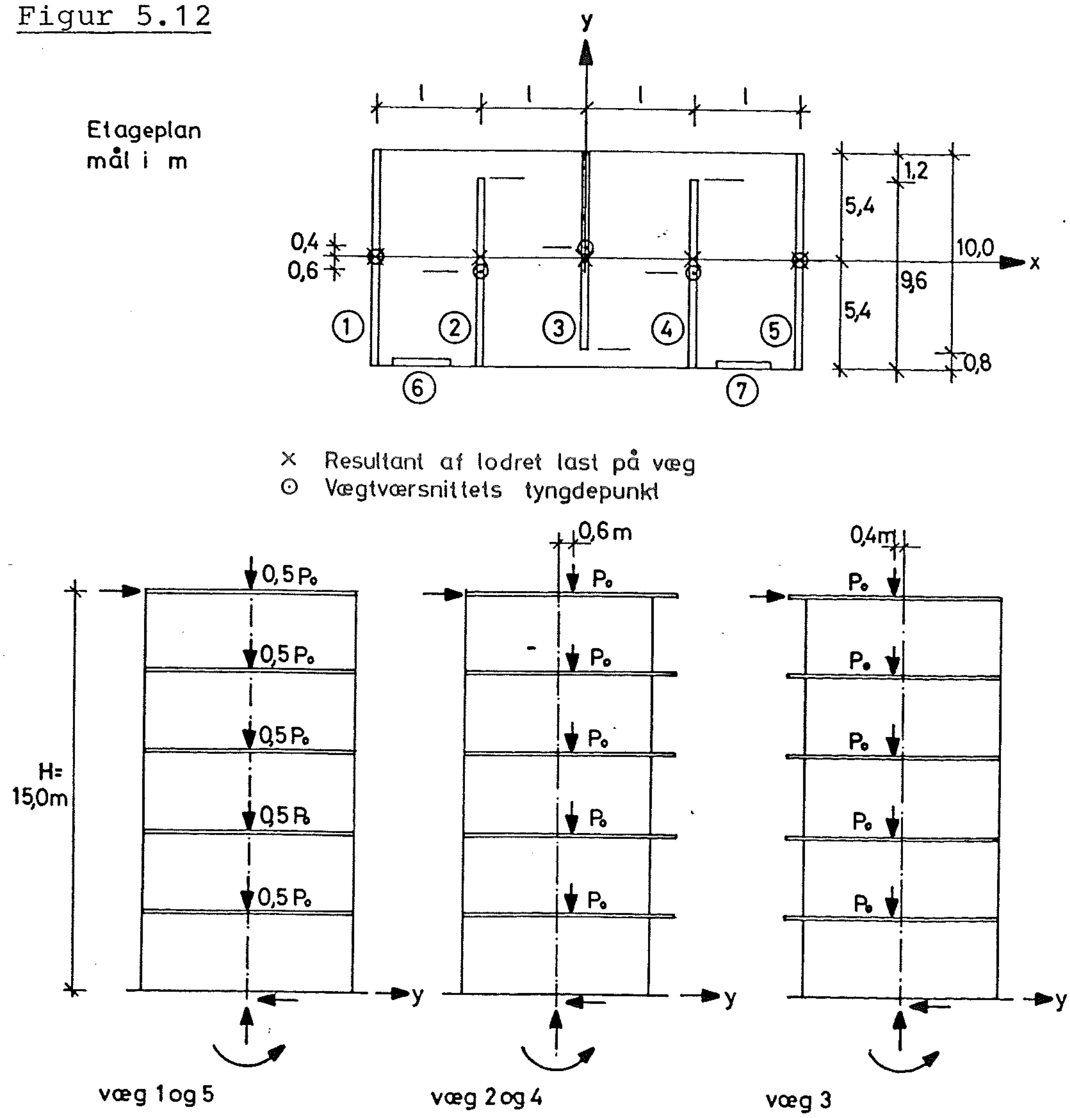
samt et moment M_F om vægsystemets forskydningscentrum F, hvis P_x og P_y ikke går gennem F.

Ved fordeling af denne last ved hjælp af dækskivefordelingsmetoden fås for hver væg i skivekonstruktionen et bidrag til snitkræfterne i væggen: Q'_x henh. Q'_y.

De resulterende vandrette kræfter på væggen, hidrørende fra excentrisk lodret last, bliver:

(5.03) $$\boxed{\begin{aligned} Q_x &= P'_x + Q'_x \\ Q_y &= P'_y + Q'_y \end{aligned}}$$

Figur 5.12



Opstalt vægge med last fra dæk og med snitkræfter

(173)

Eksempel 5.03

I en skivebygning i 5 etager med etageplan som vist på figur 5.12 skal beregnes snitkræfterne i væggene i fundamentsniveau for jævnt fordelt lodret last på dækkene. For en hel etage er den samlede lodrette last $4P_o$, som fordeler sig med P_o på hver af væggene 2, 3 og 4 og med 0,5 P_o på hver af væggene 1 og 5. Lasten P_o henholdsvis 0,5 P_o er vist både på etageplanen og på vægopstalterne.

Vægtværsnittenes tyngdepunkter er markeret på figuren.

Væggene antages at kunne beregnes som bjælker, indspændt i fundament.

Væghøjden H er 15,0 m.

Afstanden a fra tyngdepunktet til lasten regnes positiv i y-aksens retning.

Antallet af etager er n = 5.

Snitkræfterne regnes positive som vist. I de udregnede momenter er længder indsat i m.

væg	P	a	$M_{lodr.last}$ $= n \cdot a \cdot P$	P'_y $= -\frac{n\,a}{H} P$
1 og 5	0,5 P_o	0	0	0
2 og 4	P_o	+0,6	+3,0 P_o	-0,2 P_o
3	P_o	-0,4	-2,0 P_o	+0,1333 P_o

P er lasten pr. væg pr. etage.

De fiktive snitkræfter P'_y på øverste dækskive fordeles nu - som en ydre last - på væggene efter dækskivefordelingsmetoden. Dækskiven antages uendelig stiv. Der benyttes ikke korrigerede inertimomenter.

På grund af symmetrien må forskydningscentret F ligge på y-aksen. Og da alle vægge i x-retningen ligger på linie, må F ligge på denne linie.

(175)

Den "ydre last" er

$$P_y = +2 \cdot 0{,}2\ P_o - 0{,}1333\ P_o = +0{,}2667\ P_o$$

$$P_x = 0$$

- i henhold til (5.02).

Den ydre last går gennem F, d.v.s. $M_F = 0$.

Snitkræfterne Q'_y i den enkelte væg findes i dette tilfælde af

$$Q'_y = \frac{\alpha_y}{\Sigma\alpha_y} \cdot P_y$$

hvor α_y er den enkelte vægs relative stivhed i y-aksens retning.

Der benyttes de i nedenstående skema anførte, afrundede relative stivheder.

Snitkræfterne bliver

væg	α_y	Q'_y
1	1	$+0{,}0635\ P_o$
2	0,7	$+0{,}0444\ P_o$
3	0,8	$+0{,}0508\ P_o$
4	0,7	$+0{,}0444\ P_o$
5	1	$+0{,}0635\ P_o$
Σ	4,2	

Der kommer ingen snitkræfter i væg 6 og 7.

Snitkræfterne i væggene i fundamentsniveau:

forskydningskraften

$$Q = P'_y + Q'_y$$

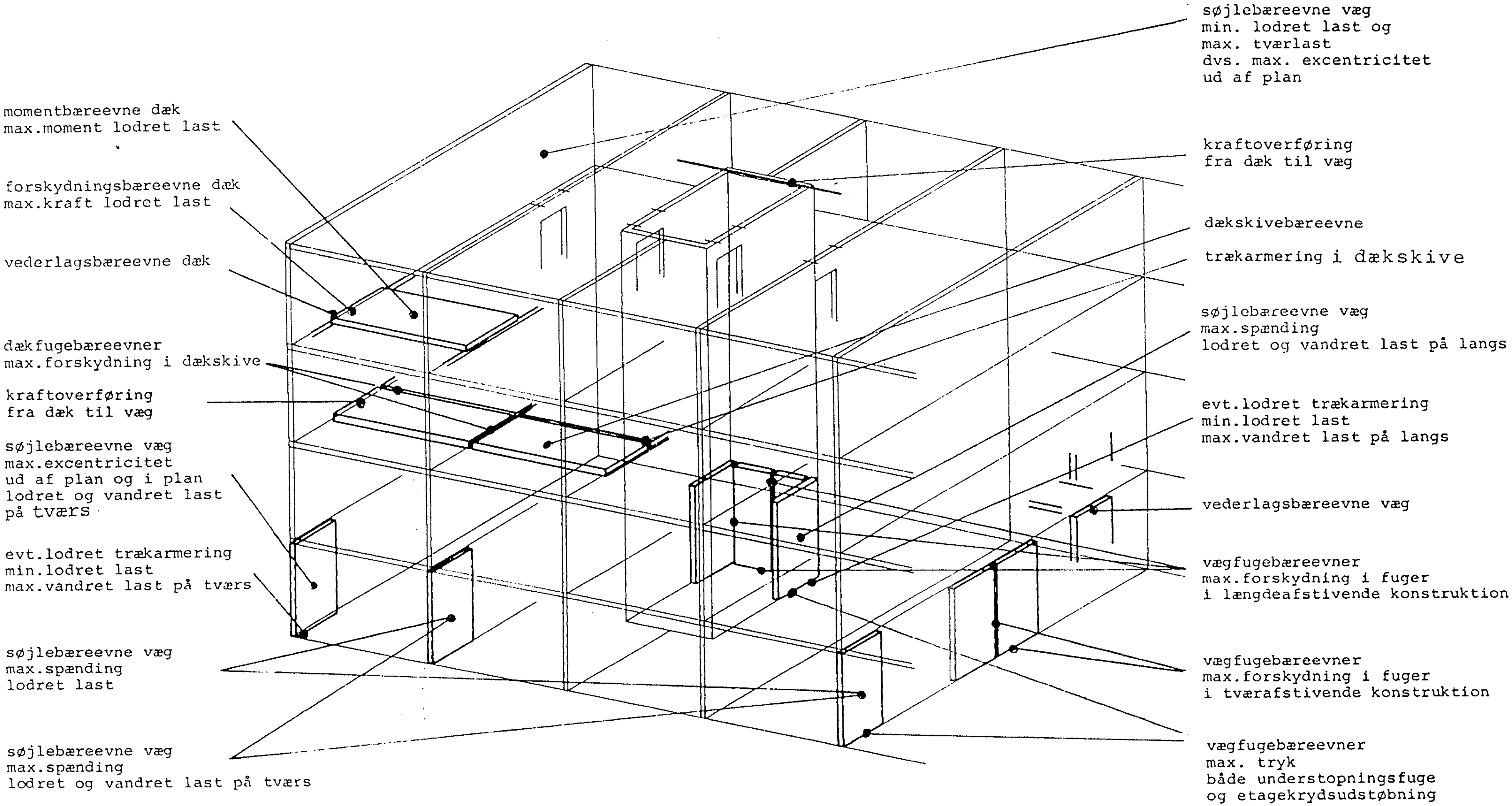
momentet

$$M = M_{\text{lodrlast}} + M_{P'+Q'} = M_{\text{lodrlast}} + (P'_y + Q'_y) \cdot H$$

normalkraften

$$N = n \cdot P$$

kan nu beregnes.



Figur 5.13. Kritiske steder.

væg	Q	M	N
1	+0,0635 P_o	+0,9525 P_o	2,5 P_o
2	-0,1556 P_o	+0,6660 P_o	5,0 P_o
3	+0,1841 P_o	+0,7615 P_o	5,0 P_o
4	-0,1556 P_o	+0,6660 P_o	5,0 P_o
5	+0,0635 P_o	+0,9525 P_o	2,5 P_o

hvor længder er indsat i m i de udregnede momenter.

Kontrol: $\Sigma Q = -0,0001 \simeq 0$ (der er ingen ydre vandret last på bygningen som helhed).

5.3 Kritiske steder

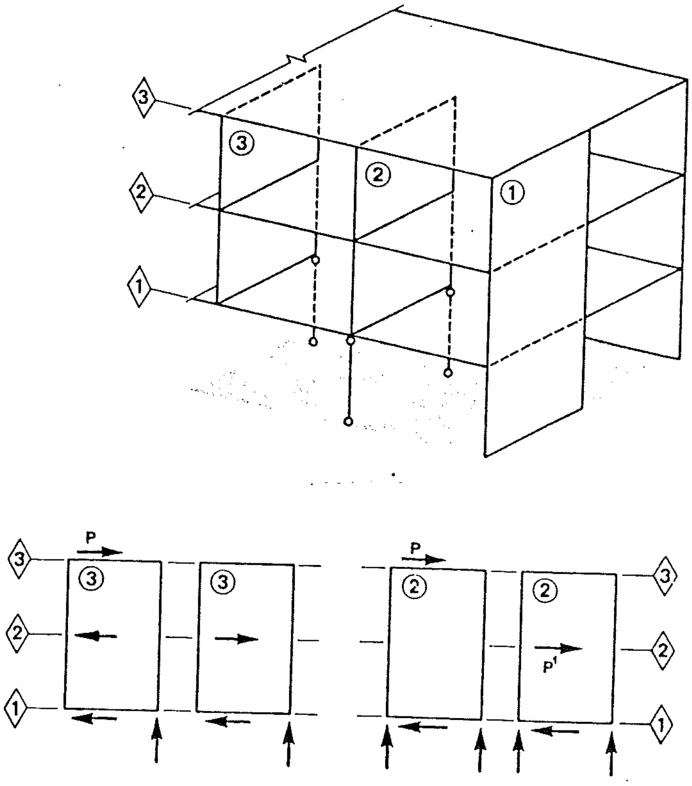
På figur 5.13 er skitseret en konstruktion med angivelse af, hvor (de kritiske steder) og hvad, det er påkrævet at undersøge, for at det er sikret, at belastningen ikke resulterer i snitkræfter, der ikke optages af konstruktionen.

Figur 5.13. Kritiske steder.

Som for en-etage høje vægge gælder det for fler-etager høje vægge, at væggene må have mindst 3 statisk uafhængige snitkræfter til rådighed til understøtninger under lastniveau for at lasten kan blive ført ned gennem væggen.

I eksemplet figur 5.15, hvor der er vist to-etage høje vægge i en skivebygning, kan væggen mrk. 2, der er understøttet på 2 søjler og af dækskiven langs underkant i niveau 1 og dækskiven i niveau 2, føre lasten ned til niveau 1 (både P i niveau 3 og P' i niveau 2).

Væggen mrk. 3, der er understøttet på 1 søjle og af dæksiven langs underkant i niveau 1 og dækskiven i niveau 2, kan føre lasten P i niveau 3 ned til niveau 2; herfra skal den så føres videre gennem dækskiver og andre vægskiver. Lasten P' i niveau 2 kan ikke føres ned af væg 3 (sammenlign med én-etage høje vægge).



Figur 5.15

I det ovenstående er betragtet to-etager høje vægge. For mere end to-etager høje vægge gælder tilsvarende betragtninger.

Udeladelser i modellen

I konstruktionsmodeller vil man sædvanligvis udelade visse dele.

Det drejer sig om f.eks. små "stumper" af vægge vinkelret på hoveddelen af væggen.

Væg-"stumper" med et areal på op til 5-10% af hovedvæggen er "små" og kan udelades af modellen, jfr. eksempel 5.04.

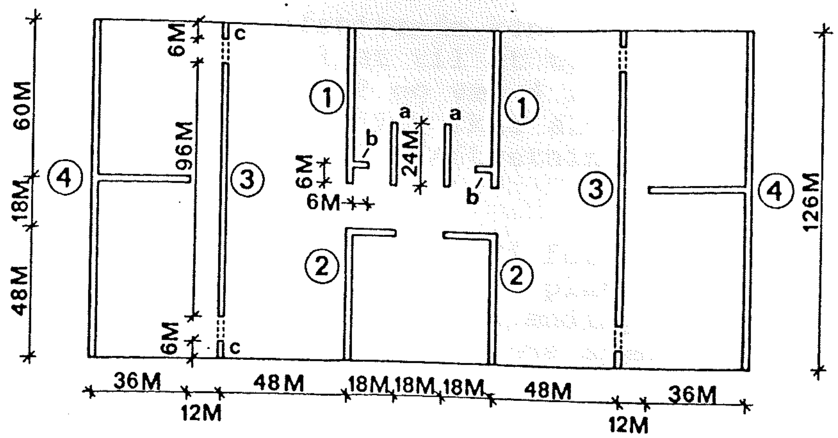
I den afstivende konstruktion for vandret last drejer det sig endvidere om, f.eks. søjler og korte vægge med lille udstrækning i kraftretningen.

I bygninger med mange vægge af forskellig størrelse kan man i den afstivende konstruktion for vandret last udelade vægge med inertimoment på under 5-10% af størrelsesordenen af intertimomentet for størsteparten af vægskiverne. Dette gælder også for små delvægge, der er forbundet med andre vægge med døroverliggere.

(181)

Eksempel 5.04

Figur 5.16



Figur 5.16 viser en etageplan med vægge. I den afstivende konstruktion for vandret belastning i retningen op-ned på figuren vil man kunne se bort fra de korte vægge mrk. a, de små vægstumper mrk. b, samt de små vægdele mrk. c.

Vægge mærket	Fordeling af vandret tværlast på vægge "efter intertimoment" i %		
1 med b	-	7,6	-
1 uden b	6,5	-	6,5
2	6,1	6,0	6,1
3	26,8	26,5	26,7
4	60,6	59,9	60,3
a	-	-	0,4
Ialt:	100,0	100,0	100,0

Ved at se bort fra vægstumperne b, får væg 1 et ca. 15% mindre inertimoment og fordelingen af vandret last ændres som vist i skemaet. Virkningen for de andre vægge ses at være ringe og tilnærmelsen rimelig. Ændringen ved at se bort fra væggene mrk. a, ses også i skemaet.

Det er allerede nævnt, men skal gentages her, at udeladelserne skal foretages med omtanke, og forholdene i de udeladte dele skal vurderes ud fra de fundne forhold (spændinger og deformationer) i de dele, der er taget med i modellen.

I eksemplet ovenfor, med væg a udeladt, vil man f.eks. skønsmæssigt kunne dimensionere væg a for en vandret last på omkring 1/10 af lasten på væg 1, svarende til forholdet imellem inertimomenterne.

Effektivt tværsnit for tyndfligede vægprofiler ved momentpåvirkning

Består den afstivende konstruktion af vægge, sammenstillet til et tyndfliget profil, som f.eks. væg 2 og væg 4 i figur 5.16, kan man ved bøjning ikke altid regne fligen vinkelret på kraftretningen effektiv i fuld bredde.

Den tekniske bjælketeori forudsætter, at plane tværsnit forbliver plane, og opererer med en retlinet normalspændingsfordeling ud fra nullinien med samme spænding i samme afstand fra nulliniens.

I en bjælke med tyndfliget tværsnit vil dette imidlertid ikke altid være tilfældet, og normalspændingen vil variere efter en krum kurve hen over en flig parallel med nullinien, faldende i retningen fra kroppen og udefter, - som følge af ikke uvæsentlige forskydningsdeformationer i fligen.

Ved små flige er dette uden betydning; men ved store flige bliver bøjningsstivheden mærkbart mindre end svarende til fuldt tværsnit. Man kan tage højde for dette ved kun at regne en del af fligen effektiv og se bort fra resten.

Idet vi forudsætter, at der ikke er fare for foldning i fligene (dækskiverne optræder som afstivning herimod og fligene bliver i forbindelse med vægberegningen undersøgt for søjlevirkning), er den effektive bredde, der kan benyttes, ikke nødvendigvis begrænset til de maksimale bredder, der normalt gælder for tyndfligede bjælker og søjler (og for bjælker i beton med T-tværsnit).

Men meget mere end det dobbelte af maksimal flig i beton-T-bjælke vil det almindeligvis ikke være rimeligt at regne med.

Fligbredden bør heller ikke regnes meget større end profilhøjden, når det effektive profil til stivhedsberegningen skal fastsættes.

For et tyndfliget vægprofil udsat for momentpåvirkning kan det anbefales at regne med et effektivt tværsnit med en effektiv fligbredde b'_e beregnet af den følgende formel.

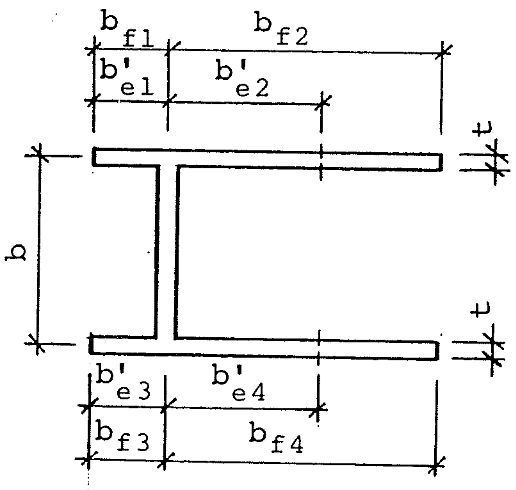
Den effektive fligbredde udregnes for hver flig for sig.

Effektiv fligbredde ved bøjning

$$\boxed{b'_e \leqq \begin{cases} 15 \text{ á } 20 \times t \\ 1 \text{ á } 1{,}5 \times b \\ b_f \\ 0{,}2 \text{ á } 0{,}3 \times H \end{cases}} \qquad (5.04)$$

b_f er den aktuelle fligbredde.

H er totalhøjden af væggen (bjælkelængden).



Figur 5.17

Det skal også huskes, at ved stor bjælkehøjde (krophøjden i tyndfliget tværsnit) i forhold til bjælkelængden er den tekniske bjælketeoris forudsætning om, at plane tværsnit forbliver plane, heller ikke rimelig godt opfyldt (jævnfør f.eks. afsnit 3 .

Normalkraft og momentpåvirkning

For vægprofiler, der er belastet med både lodret og vandret last, således at der optræder både moment- og normalkraft, og hvor der regnes med effektivt tværsnit mindre end det fulde tværsnit, melder det spørgsmål sig, hvor stor en normalkraft der skal regnes med (momentet er givet).

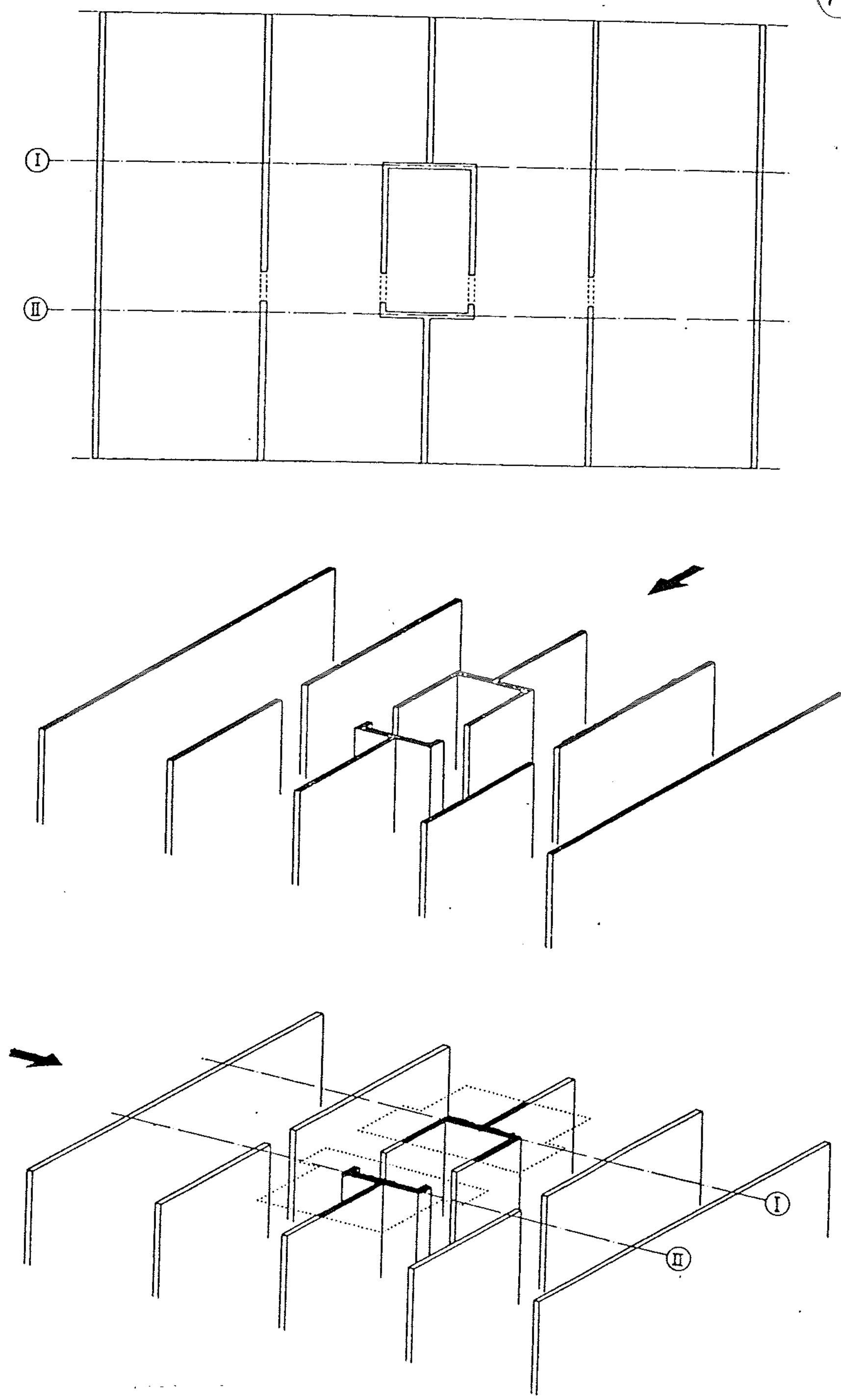
I almindelighed kan man her regne med en normalkraft, der svarer til den last, der virker på den del af væggene, der hører med til det effektive tværsnit. I bygningen i figur 5.18 , hvor der er markeret to effektive tværsnit (v. linie I og II) til optagelse af den vandrette belastning på langs ad bygningen, bliver normalkraften således den lodrette last inden for den prikkede linie omkring det effektive tværsnit. For profilet omkring linie II gælder, at grænsen for den lodrette last ligger midt i døråbningen.

I særlige tilfælde, som hvis der f.eks. optræder store enkeltkræfter, må det nærmere vurderes, hvilken lodret last, der skal medregnes.

Forskydningskraft-optagelse

I de vandrette fuger i vægge skal forskydningskraften kunne optages ved friktion.

I almindelighed stilles det krav, at $N_Q \cdot \mu \geq Q$, hvor Q er forskydningskraften, μ er friktionskoefficienten og N_Q er den til rådighed værende stabiliserende normalkraft. Som N_Q kan regnes integralet af normalspændingen (tryk) over et effektivt tværsnit, beregnet som kroparealet plus flige i en bredde på 1 à 2 gange fligtykkelsen i tyndfligede profiler.



Figur 5.18

(185)

Virksomme dele af modellen for given last

I de forskellige lastkombinationer, som bygningen undersøges for, vil det være forskellige dele i konstruktionsmodellen, der er virksomme.

Men ikke virksomme dele er eller kan være nødvendige af hensyn til stabiliteten.

Eksempelvis er i en skivebygning ikke alle vægge virksomme over for vandret last i en given retning, ligesom visse vægge er uvirksomme for lodret last fra dæk, der er enkeltspændte.

Skivebygningen, figur 2.23 , der er undersøgt i eksempel 2.08 og eksempel 2.09, er et eksempel på en skivekonstruktion, hvor visse skiver er virksomme for visse belastninger, men ikke virksomme for andre belastninger.

På figur 5.18 er vist en opgangsetage fra en 4-etages boligblok. Dækkene regnes enkeltspændte og hvilende på tværväggene (gælder også for trappen).

Længdevæggene er ikke udsat for lodret last (excl. væggens egenlast), og de er kun virksomme for lodret last i det omfang de indgår i et profil med tyndfliget tværsnit.

Omvendt er tværvæggene uvirksomme for vandret last på langs, undtagen dog de dele af tværvæggene, der indgår i et længdeafstivende profil; og hvis belastningen på bygningen ikke går gennem forskydningscentret for vægsystemet, er tværvæggene virksomme til optagelse af drejningsbidraget (se afsnit 4.3) i forbindelse med fordelingen af belastningen til væggene.

5.5 Spændingsundersøgelse for vægge

Ugunstigste lastkombination

En konstruktion - og altså også vægge - skal undersøges for den ugunstigste af de kombinationer af last, som bygningen udsættes for.

Det, der for væggene i betonelementbyggeri har interesse, er de største trykspændinger og risikoen for trækspændinger. Endvidere forskydningsspændingerne, specielt i fugerne i væggene, herunder risikoen for glidning i de vandrette fuger.

I dette afsnit behandles normalspændingsforholdene.

Der benyttes i almindelighed en retlinet normalspændingsfordeling hen over vægtværsnittet, beregnet af formlen

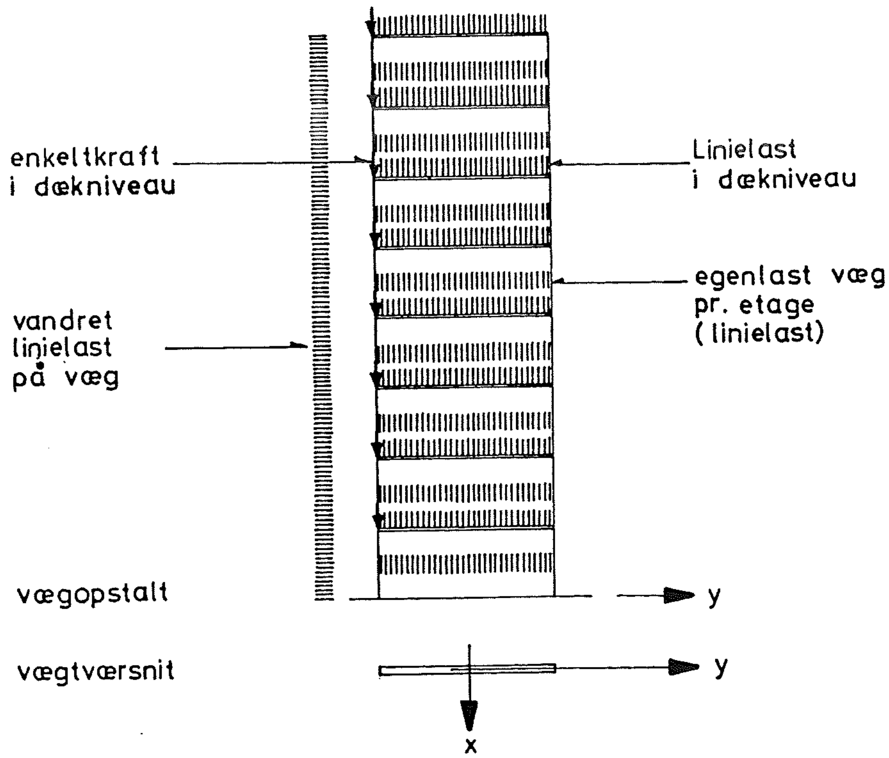
$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x} \qquad (5.05)$$

her er

- σ normalspændingen, regnet positiv som tryk
- N normalkraften, regnet positiv som tryk
- M_x moment om x-aksen, regnet positiv, når det giver tryk i punkter med positive y-værdier
- M_y moment om y-aksen, regnet positiv, når det giver tryk i punkter med positive x-værdier
- $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}$ koordinater i koordinatsystem gennem tværsnittets tyngdepunkt med akser i tværsnittets hovedakser
- A tværsnitsareal
- I_x inertimoment om x-aksen
- I_y inertimoment om y-aksen

For plane vægge er det ene af leddene $\frac{M_x}{I_x} y$ og $\frac{M_y}{I_y} x$ lig med nul.

Figur 5.19


enkeltkraft
i dækniveau
Linielast
i dækniveau
egenlast væg
pr. etage
(linielast)
vandret
linielast
på væg
vægopstalt
y
vægtværsnit
y
x

Giver beregningerne trækspændinger, må der regnes om med revnet jernbeton-tværsnit og indlægges trækstænger, idet der i betonelementbyggeri normalt ikke kan accepteres trækspændinger i et snit som dette.

Hvis ikke den lodrette last står meget excentrisk, fås for vægge indspændt i fundamentet den største trykspænding i nederste etage lige over fundament for lastkombinationen vandret last (vind eller masselast) og størst mulig lodret last (permanent last (egenlast) og variabel last (nyttelast og naturlast)).

Mindste trykspænding og risiko for trækspænding fås for lastkombinationen vandret last og mindst mulig lodret last (d.v.s. kun permanent last, når den variable last går nedad).

Den vandrette last skal sættes på i den retning, hvor den giver moment (om vandret akse), der drejer samme vej som moment fra excentrisk lodret last.

Eksempel

<u>Eksempel 5.05</u>

I eksemplet skal beregnes de forekommende kantspændinger for kombination af lodret og vandret last for en 8 etages høj væg (etagehøjde 2,8 m) med tværsnit 5,7 m x 0,15 m og udført i betonelementer.

<u>lodret last</u> pr.etage		permanent last	variabel last
egenlast væg	kN/m	10	
linielast fra dæk	kN/m	18	6
enkeltkraft fra dæk	kN	12	4

<u>vandret last</u> pr.m i højden		naturlast
vindlast	kN/m	8

Belastningerne angriber som vist på figur 5.19. Den vandrette last kan gå både i y-aksens retning og i den modsatte retning.

Vægtværsnit:

areal $A = 5{,}7 \cdot 0{,}15 = 0{,}855 \text{ m}^2$

inertimoment $I_x = \frac{1}{12} \cdot 0{,}15 \cdot 5{,}7^3 = 2{,}31 \text{ m}^4$

Spændinger beregnes af (5.05), idet $\frac{M_y}{I_y} \cdot x$ er lig med nul

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

Snitkræfterne i et snit nederst i væggene bliver i tværsnittets tyngdepunkt:

lodret last	permanent	variabel
N	: $8 \cdot 10$ kN/m$\cdot 5{,}7$ m	
	$+8 \cdot 18$ kN/m$\cdot 5{,}7$ m	$8 \cdot 6$ kN/m$\cdot 5{,}7$ m
	$+8 \cdot 12$ kN	$+8 \cdot 4$ kN
	= 1373 kN	= 306 kN
$M_{x,\text{lodr.last}}$:	$-8 \cdot 12$ kN$\cdot \frac{1}{2} \cdot 5{,}7$ m	$-8 \cdot 4$ kN$\cdot \frac{1}{2} \cdot 5{,}7$ m
	= −274 kNm	= −91 kNm

vandret last	naturlast
$M_{x,\text{vind}}$	: $\pm\frac{1}{2} \cdot 8$ kN/m$\cdot (8 \cdot 2{,}8 \text{ m})^2 = \pm 2007$ kNm

Største normalspænding fås i kanten med y = −2,85 m for permanent plus variabel lodret last samt vandret last i retningen modsat y-aksen:

$$N = 1373 + 306 = 1679 \text{ kN}$$

$$M_x = -274 - 91 - 2007 \text{ kNm} = -2372 \text{ kNm}$$

$$\sigma = \frac{1679}{0{,}855} + \frac{-2372}{2{,}31} \cdot (-2{,}85)$$

$$= 1964 + 2926 = 4890 \text{ kN/m}^2$$

$$= \underline{4{,}89 \text{ MN/m}^2}$$

Mindste normalspænding fås i kanten med y = +2,85 m for permanent lodret last samt vandret last i retningen modsat y-aksen:

$$N = 1373 \text{ kN}$$

$$M_x = -274 - 2007 \text{ kNm} = -2281 \text{ kNm}$$

$$\sigma = \frac{1373}{0{,}855} + \frac{-2281}{2{,}31} \cdot 2{,}85$$

$$= 1606 - 2814 = -1208 \text{ kN/m}^2$$

$$= \underline{-1{,}21 \text{ MN/m}^2}$$

Der fås således trækspændinger, hvilket er uacceptabelt i en betonelementvæg; væggen må undersøges med revnet tværsnit.

Søjleberegning

De foregående afsnit har drejet sig om at finde snitkræfterne på væggene og herunder normalspændingsforløbet hen over et vægprofil eller en plan væg; spændingen blev her regnet konstant over vægtykkelsen; excentriciteter for lodret last har været excentriciteter i forhold til tyngdepunktet af tværsnittet for vægprofiler; for plane vægge har der kun været tale om excentriciteter i væggens plan.

Det skal undersøges, om væggen har en bæreevne, der er stor nok til at modstå de trykspændinger, der er beregnet, - når der tages hensyn til søjlevirkning.

Ved denne søjleberegning bliver der også tale om at regne med excentriciteter (for den lodrette belastning) ud af væggens plan.

Med andre ord skal det undersøges om væggen, beregnet som søjle med søjlelængde lig med afstanden mellem dækskiverne, kan bære den spænding, belastningen forårsager.

Denne søjleberegning redegøres der ikke for her. Der henvises til noterne om vægelementers bæreevne.

(192)

6. LITTERATURFORTEGNELSE

[1] Statens Byggeforskningsinstitut (SBI): "SKIVEBYGNINGERS STABILITET 1 - KONSTRUKTIONSPRINCIPPER" SBI-anvisning nr. 82, 1976.

[2] Fr. Fabricius-Bjerre: "LÆREBOG I GEOMETRI I" 3. udgave 1958.

[3] B.Stafford Smith & P.C.M. Lau: "A METHOD OF ASSESSING THE STATIC STABILITY OF PANEL TYPE BUILDINGS" Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Vol.53, Part 2, 1972, pp. 77 - 86.

[4] H.J. Larsen: "TEKNISK ELASTICITETS- OG STYRKELÆRE" Polyteknisk Forlag 1969.

[5] H. Riberholt: "STATISK BESTEMTE SØJLER" ABK-Forelæsningsnotat nr. F38, 1973.

[6] Bent Erik Pedersen og Esben Byskov: "FORELÆSNINGSNOTATER VEDRØRENDE SØJLER" Polyteknisk Forlag 1970.

[7] Troels Brøndum-Nielsen, Erik Skettrup: "BETONKONSTRUKTIONER I", 2. udgave ABK-Forelæsningsnotat nr. F92, 1982.

[8] M.P. Nielsen: "OM JERNBETONSKIVERS STYRKE" Polyteknisk Forlag 1969.

[9] K.W. Johansen: "BRUDLINIETEORIER" 1943.

[10] K.W. Johansen: "FORELÆSNINGER OVER ELASTICITETS- OG STYRKELÆRE" Akademisk Forlag 1967.

[11] H.J. Larsen: "MATEMATISK ELASTICITETSTEORI" Akademisk Forlag 1963.

[12] H. Linse: "WANDARTIGER TRÄGER MIT PFEILER-VORSPRÜNGEN" Die Bautechnik 1961, p. 191-197 og p. 264-268

[13] Timoshenko and Goodier:
"THEORY OF ELASTICITY"
2. udgave 1951.

[14] Walter Schleeh:
"DIE RANDSTÖRUNGEN IN DER TECHNISCHEN BIEGELEHRE"
Beton- und Stahlbetonbau, 1966
p. 10 - 19.

[15] Walter Schleeh:
"BAUTEILE MIT ZWEIACHSIGEM SPANNUNGS-ZUSTAND"
Beton-kalender 1972
Bind 2, p. 513 - 620.

[16] Esben Byskov:
"KRAFTMETODEN & DEFORMATIONSMETODEN"
ABK-Forelæsningsnotat nr. F23, 1971.

[17] Owe Eriksson:
"STATISK BEREGNING AF VINDAFSTIVENDE VÆGGE I HØJHUSE"
Ingeniøren 1961, p. 453 - 462.

[18] Mogens Buhelt og Klaus Feilberg Hansen:
"BEREGNING AF VÆGSYSTEMER I SKIVEBYGNINGER"
SBI-RAPPORT 91
Statens Byggeforskningsinstitut, 1973.

[19] Statens Byggeforskningsinstitut:
"BRUGERVEJLEDNING FOR SHEWALS",
1973.

[20] A.F. Andersen, H. Bohr & Richard Petersen:
"MATEMATISK ANALYSE", Bind II,
Jul. Gjellerups Forlag 1960.

[21] Riko Rosman:
"DIE STATISCHE BERECHNUNG VON HOCHHAUSWÄNDEN MIT ÖFFNUNGSREIHEN"
Bauingenieur-Praxis, Heft 65
Verlag von Ernest & Sohn, Berlin, 1965.

[22] Riko Rosman:
"STATIK UND DYNAMIK DER SCHEIBENSYSTEME DES HOCHBAUES"
Springer-Verlag, Berlin 1968.

[23] Ikke anvendt.

194

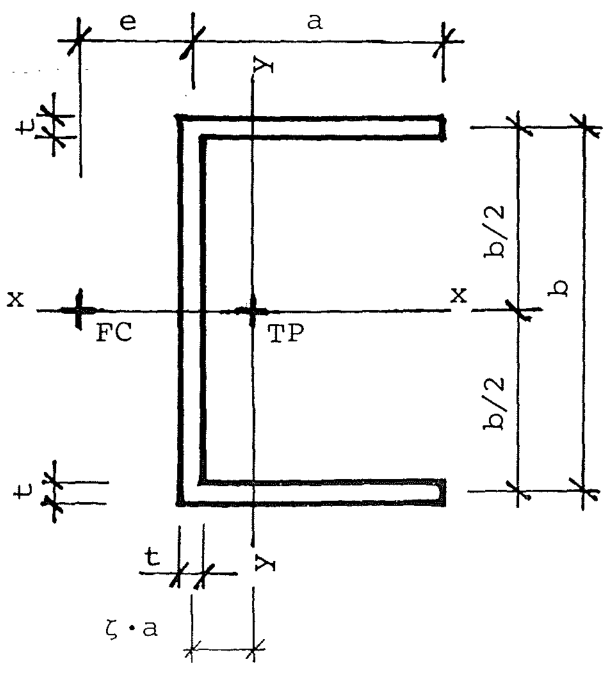
[24] Esben Byskov og Leif Otto Nielsen:
"ELEMENTMETODEN OG DEFORMATIONS-
METODEN"
Bygningsstatiske Meddelelser,
Årgang XLV, Nr. 2, Juni 1974,
p. 35 - 64.

[25] I.A. MacLeod & D.R. Green:
"FRAME IDEALIZATION FOR SHEAR WALL
SUPPORT SYSTEMS"
Structural Engineer
Feb. 1973, Vol.51, No.2, p. 71 - 74.

[26] Dansk Ingeniørforenings norm for:
Sikkerhedsbestemmelser
for Konstruktioner, DS 409, og
Last på Konstruktioner, DS 410,
1982.

TVÆRSNITSKONSTANTER FOR U-TVÆRSNIT

$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{e}{a}$	$\frac{I_x}{t\cdot b^3}$	$\frac{I_y}{t\cdot b\cdot a^2}$	$\frac{I_y}{t\cdot b^3}$
0,1	10	0,1875	0,1333	0,0583	0,000583
0,2	5	0,2727	0,1833	0,1048	0,00419
0,25	4	0,3000	0,2083	0,1250	0,00781
0,3	3,333	0,3214	0,2333	0,1438	0,01294
0,333	3	0,3333	0,2500	0,1556	0,01728
0,4	2,5	0,3529	0,2833	0,1778	0,02844
0,5	2	0,3750	0,3333	0,2083	0,05208
0,6	1,667	0,3913	0,3833	0,2364	0,08509
0,667	1,5	0,4000	0,4167	0,2540	0,1129
0,7	1,429	0,4038	0,4333	0,2625	0,1286
0,75	1,333	0,4091	0,4583	0,2750	0,1547
0,8	1,25	0,4138	0,4833	0,2872	0,1838
0,833	1,2	0,4167	0,5000	0,2951	0,2050
0,9	1,111	0,4219	0,5333	0,3107	0,2517
1	1	0,4286	0,5833	0,3333	0,3333
1,1	0,909	0,4342	0,6333	0,3552	0,4298
1,2	0,833	0,4390	0,6833	0,3765	0,5421
1,25	0,8	0,4412	0,7083	0,3869	0,6045
1,333	0,75	0,4444	0,7500	0,4040	0,7183
1,5	0,667	0,4500	0,8333	0,4375	0,9844
2	0,5	0,4615	1,0833	0,5333	2,1333



$t << b$

I_x : inertimoment om x-aksen

I_y : inertimoment om y-aksen

TP : tyngdepunkt

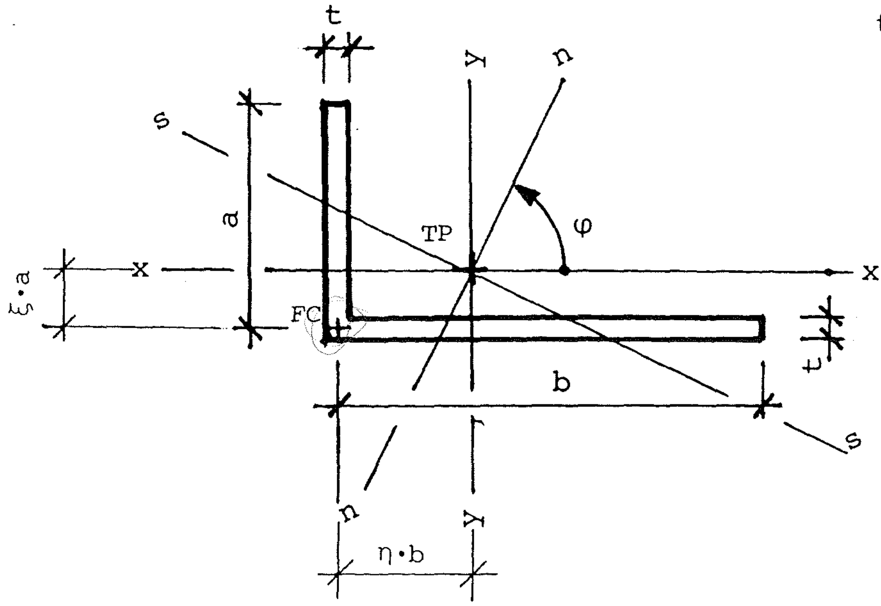
FC : forskydningscentrum

$$\zeta = \frac{1}{2+\frac{b}{a}}$$

TVÆRSNITSKONSTANTER FOR L-TVÆRSNIT

$\frac{b}{a}$	I_x	I_y	I_{45°	Z_{xy}	I_n	I_s	φ
	faktor på I- og Z-tal : $\boxed{t \cdot a^3}$						
1	0,2083 (=5/24)	0,2083 (=5/24)	0,3333 (=1/3)	-0,125 (=-3/24)	0,0833 (=1/12)	0,3333 (=1/3)	-45°
1,25	0,2222	0,3798	0,4746	-0,174	0,1104	0,4916	-32,80°
1,5	0,2333	0,6188	0,6510	-0,225	0,1298	0,7223	-24,71°
1,75	0,2424	0,9338	0,8665	-0,278	0,1443	1,0320	-19,42°
2	0,2500	1,3333	1,1250	-0,333	0,1557	1,4277	-15,80°
2,25	0,2564	1,8254	1,4303	-0,389	0,1651	1,9168	-13,20°
2,5	0,2619	2,4182	1,7865	-0,446	0,1731	2,5069	-11,25°
2,75	0,2667	3,1195	2,1973	-0,504	0,1802	3,2060	- 9,73°
3	0,2708	3,9375	2,6667	-0,563	0,1865	4,0219	- 8,53°
3,25	0,2745	4,8800	3,1986	-0,621	0,1922	4,9623	- 7,55°
3,5	0,2778	5,9549	3,7969	-0,681	0,1973	6,0353	- 6,74°
3,75	0,2807	7,1700	4,4655	-0,740	0,2021	7,2486	- 6,06°
4	0,2833	8,5333	5,2083	-0,800	0,2065	8,6102	- 5,49°
4,25	0,286	10,053	6,029	-0,860	0,211	10,128	- 4,99°
4,5	0,288	11,736	6,932	-0,920	0,214	11,809	- 4,57°
4,75	0,290	13,591	7,921	-0,981	0,218	13,663	- 4,20°
5	0,292	15,625	9,000	-1,042	0,221	15,695	- 3,87°

I_n og I_s angiver hovedinertimomenterne. φ er positiv mod uret.



t << a

TP : tyngdepunkt
FC : forskydningscentrum
I : inertimoment
Z : centrifugalmoment
- om de angivne akser

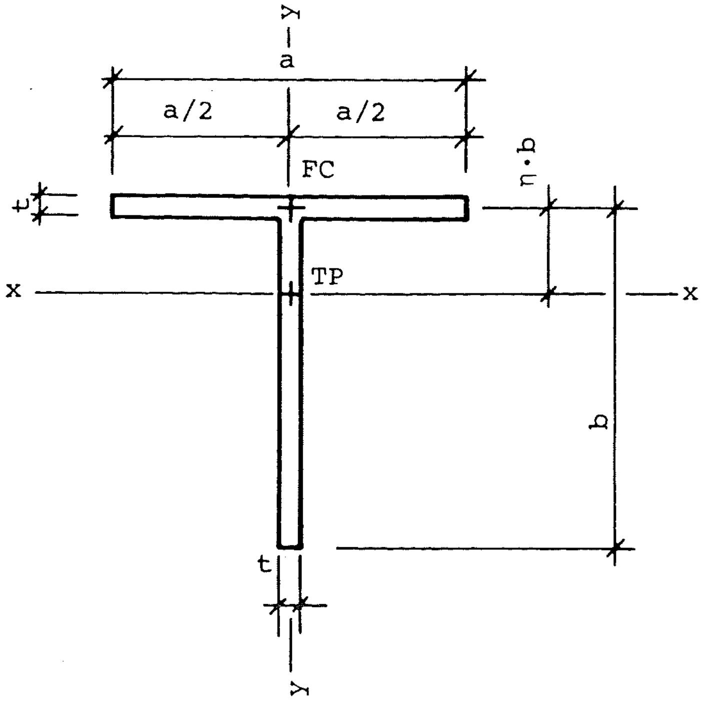
$$\xi = \frac{1}{2 \cdot (1 + \frac{b}{a})}$$

$$\eta = \xi \cdot \frac{b}{a}$$

(197)

TVÆRSNITSKONSTANTER FOR T-TVÆRSNIT

$\frac{a}{b}$	η	$\frac{I_x}{t \cdot b^3}$	$\frac{I_y}{t \cdot b^3}$
0,2	0,4167	0,1250	0,000667
0,25	0,4000	0,1333	0,00130
0,3	0,3846	0,1410	0,00225
0,3333	0,3750	0,1458	0,00309
0,4	0,3571	0,1548	0,00533
0,5	0,3333	0,1667	0,01042
0,6	0,3125	0,1771	0,01800
0,6667	0,3000	0,1833	0,0247
0,7	0,2941	0,1863	0,0286
0,75	0,2857	0,1905	0,0352
0,8	0,2778	0,1944	0,0427
0,9	0,2632	0,2018	0,0608
1	0,2500	0,2083	0,0833
1,1	0,2381	0,2143	0,1109
1,2	0,2273	0,2197	0,1440
1,25	0,2222	0,2222	0,1628
1,3333	0,2143	0,2262	0,1975
1,5	0,2000	0,2333	0,2813
1,75	0,1818	0,2424	0,4466
2	0,1667	0,2500	0,6667



$t << b$

I_x : intertimoment om x-aksen

I_y : intertimoment om y-aksen

TP : tyngdepunkt

FC : forskydningscentrum